



«Решение рациональных и дробных рациональных неравенств»

Примеры

Пример 2

$$x+6+2x^3-2x(x^2+x-5)>0$$

Так как справа ноль, нам нужно преобразовать неравенство только слева. Раскроем скобку. Приведём подобные, получаем квадратное неравенство:

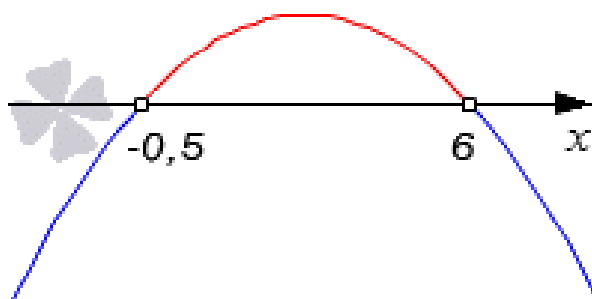
$$x+6+2x^3-2x^3-2x^2+10x>0$$
$$-2x^2+11x+6>0.$$

Решаем через дискриминант, и находим корни:

$$D=11^2-4(-2)*6=169$$

$$x_1=0,5;$$
$$x_2=6.$$

Выносим наши значения на числовую прямую, ветви вниз так как коэффициент «а» – отрицательный. Нас интересует та часть, которая выделена красным, т.е. расположенная над осью абсцисс, так как в неравенстве стоит знак больше (> 0).



Ответ: $(-0,5|6)$

Бывают и более сложные случаи, когда слева получается многочлен третьей или более высокой степени. Чтобы решить такое неравенство, рекомендуется использовать метод интервалов. Сначала мы вычисляем все корни многочлена $h(x)$, что чаще всего делается с помощью разложения многочлена на множители.



Пример 3.

$$(x^2+2)(x+4) < 14-9x$$

$$(x^2+2)(x+4) - 14 + 9x < 0$$

$$x^3 + 4x^2 + 2x + 8 - 14 + 9x < 0$$

$$x^3 + 4x^2 + 11x - 6 < 0.$$

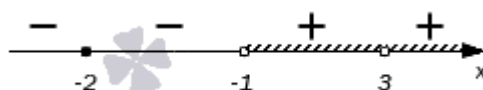
В итоге преобразований у нас получилось равносильное исходному - равенство, слева у которого стоит многочлен третьей степени. Применим метод интервалов для его решения. Вычислим корни многочлена, т.е. решим кубическое уравнение.

Получаем произведение скобок, приравниваем к нулю и находим корни:

$$(x-1)(x-2)(x-3) < 0$$

$$x_1=1, x_2=2, x_3=3.$$

Далее выполняем оставшиеся шаги интервального метода, для этого рисуем числовую прямую и выносим точки. Они разбивают прямую на 4 промежутка, в которых нужно определить знаки. Заштрихуем промежутки с минусом, так как исходное неравенство имеет знак меньше нуля.



Ответ: $(-\infty|-1)$ и $(2|3)$

Теперь нам нужно решить дробно рациональное неравенство. Здесь нам и пригодиться ОДЗ.

$$\frac{x}{(x+1)} \geq \frac{-3x}{(x-3)}$$

ОДЗ:

Знаменатель не должен быть нулевым так как на ноль делить нельзя.

$$x+1 \neq 0, x \neq -1$$

$$x-3 \neq 0, x \neq 3$$

Переносим правую часть влево, меняя знаки, справа ноль.

$$\frac{x}{(x+1)} + \frac{3x}{(x-3)} \geq 0$$

$$X(x-3) + 3x(x+1) \geq 0$$

$$4x^2 = 0$$

$$x=0$$

Выносим все корни на числовую прямую и отмечаем знаки. Далее выбираем промежуток, где «+», знак стоит больше либо равно.

Таким образом, не забывая учесть ОДЗ получаем ответ: $(-\infty|-1)$ и $[0]$ и $(-3|+\infty)$