

«Решение логарифмических неравенств»

Задания

Задание 1.

$$\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2-3x}{x} \right) \geq -1$$

Первое, что нужно сделать, проверить ОДЗ (логарифм строго положительный).

$$\frac{2-3x}{x} > 0$$

Теперь запишем левую часть неравенства, как логарифм по основанию 3:

$$\log_3 \frac{x}{2-3x} \geq -1.$$

Правую часть тоже можно записать как логарифм по основанию 3, а затем перейти к алгебраическому неравенству (без логарифмов):

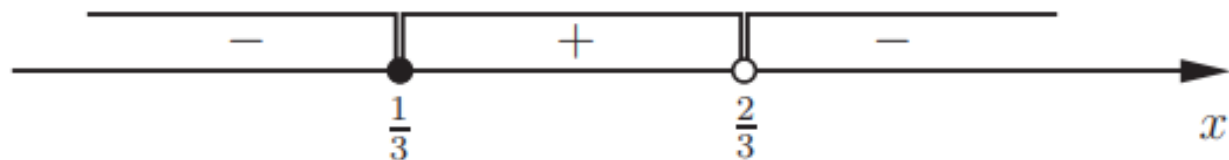
$$\log_3 \frac{x}{2-3x} \geq \log_3 \frac{1}{3};$$
$$\frac{x}{2-3x} \geq \frac{1}{3}.$$

$$\text{ОДЗ: } \frac{2-3x}{x} > 0 \text{ выполняется автоматически.}$$

$$\frac{x}{2-3x} - \frac{1}{3} \geq 0;$$

$$\frac{3x-1}{2-3x} \geq 0;$$

Решаем неравенство методом интервалов:



Ответ: $x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right)$.

Задание 2.

Решить неравенство:

$$2\log_{\frac{1}{2}}(1-x) < \log_{\frac{1}{2}}(3x+1)$$

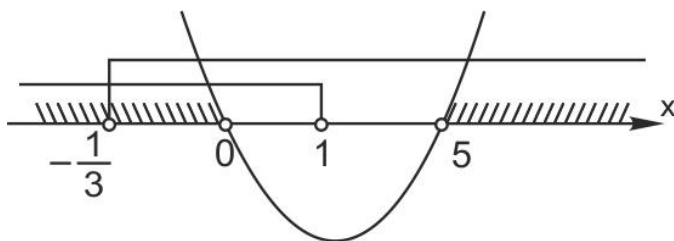
Применяем алгоритм. ОДЗ должно быть положительно.

Избавляемся от логарифма. Решаем систему, применяя ОДЗ. Далее выносим промежутки на рисунок и смотрим ответ.

Т. О. наш вариант $x \in (-\frac{1}{3}; 0)$

$$2\log_{\frac{1}{2}}(1-x) < \log_{\frac{1}{2}}(3x+1) \iff \begin{cases} 1-x > 0 \\ 3x+1 > 0 \\ (1-x)^2 > 3x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 1 \\ x > -\frac{1}{3} \\ 1+x^2-2x > 3x+1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x < 1 \\ x > -\frac{1}{3} \\ x^2-5x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 1 \\ x > -\frac{1}{3} \\ x(x-5) > 0 \end{cases}$$



Ответ: $x \in (-\frac{1}{3}; 0)$

Задание 3.

Решить неравенство:

$$\log_{x^2+1} \frac{2 \cdot 4^x - 15 \cdot 2^x + 23}{4^x - 9 \cdot 2^x + 14} \geq 0$$

Действуем по алгоритму, ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 + 1 > 0 \\ x^2 + 1 \neq 1 \end{cases} \iff x \neq 0$$

Если $x \neq 0$, то $x^2 + 1 > 1$.

Основание логарифма больше единицы для всех x .

$$\frac{2 \cdot 4^x - 15 \cdot 2^x + 23}{4^x - 9 \cdot 2^x + 14} \geq 1$$

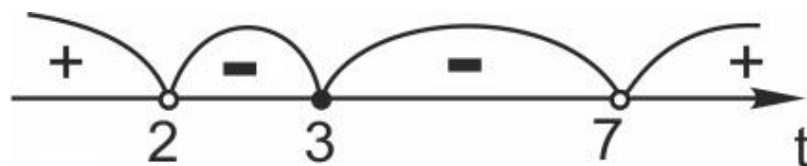
Решаем неравенство:

$$\frac{2t^2 - 15t + 23 - t^2 + 9t - 14}{t^2 - 9t + 14} \geq 0$$

$$\frac{t^2 - 6t + 9}{t^2 - 9t + 14} \geq 0$$

Находим нули функции и отмечаем их на числовой прямой. Смотрим интервалы.

$$\frac{(t-3)^2}{(t-2)(t-7)} \geq 0$$



$$\begin{cases} t = 3 \\ t > 7 \\ t < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 3 \\ 2^x > 7 \\ 2^x < 2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2 3 \\ x < 1 \\ x > \log_2 7 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Решаем относительно t , затем возвращаемся к x и записываем ответ.

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup \{\log_2 3\} \cup (\log_2 7; +\infty)$