



Конспект для учителя по теме «Решение иррациональных уравнений»

Примеры

Пример 1.

$\sqrt{x-5} = \sqrt{2x-4}$, по алгоритму возводим в квадрат обе части
 $x-5=2x-4$, приводим подобные, решаем линейное уравнение
 $x=-1$.

Не трудно догадаться, что -1 не может быть корнем данного уравнения, так как радикал станет у нас отрицательным, что недопустимо. Этот вопрос обсуждался на прошлом занятии в пункте ОДЗ, уравнения с квадратным корнем.

Ответ: решений нет

Пример 2.

Попробуйте самостоятельно решить и выполнить проверку:

$$\sqrt{2x-7} + \sqrt{x} = 0$$

$$\sqrt{2x-7} = -\sqrt{x}$$

Вид во второй строке должен смутить учеников, $\sqrt{x} \geq 0$ (только в случае $x=0$).

$$2x-7=x$$

$$x=7.$$

Выполнили проверку, решений, как и в предыдущем примере нет.

Пример 3.

Иррациональное уравнение вида $\sqrt{A} = \sqrt{B}$:

$$\sqrt{x^2 - x - 2} = \sqrt{x - 1}$$

$$A = x^2 - x - 2, B = x - 1.$$

$$\text{ОДЗ: } A, B \geq 0.$$

Но: $A=B$, то достаточно того, чтобы неотрицательное было только одно.

$$\sqrt{A} = \sqrt{B}$$

$$A=B, \text{ то } A \geq 0 \text{ или } B \geq 0.$$

В ходе решения квадратного уравнения – нет решений.

Ответ: решений нет.



Пример 4.

$$\sqrt{x^2 - x + 2} = \sqrt{x + 1}$$

Избавляемся от радикалов:

$$x^2 - x + 2 = x + 1$$

ОДЗ:

$$x + 1 \geq 0$$

Приравняв к нулю, получим квадратное уравнение: $x^2 - 2x + 1$.

Это формула сокращенного умножения – квадрат разности $(x - 1)^2 = 0$.

$x=1$ (походит к области допустимых значений, следовательно проверяем и записываем ответ).

Пример 4.

(Для самостоятельного решения)

$$\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = \sqrt{2x^2 - x - 6}$$

Дети должны избавиться от радикала.

$$3x^2 - 9x + 1 = 2x^2 - x - 6$$

Дальше найти ОДЗ, решив неравенство:

$$2x^2 - x - 6 \geq 0, x \in (-\infty; -1,5] \text{ и } [2; +\infty).$$

Далее непосредственно решение иррационального уравнения:

Решить его нужно будет через дискриминант, корни $x_1=7$, $x_2=1$ – не подходит к нашему ОДЗ. Таким образом, ответом послужит $x=7$. Обязательно нужно сделать проверку.

Пример 5.

$$x\sqrt{x-1} = 0$$

Уравнение вида $A\sqrt{B}=0$, где $A=0$, $B=0$.

ОДЗ: $B \geq 0$

Сначала отметим, что данный вид иррационального уравнения — это множители. Если один из множителей равен нулю, то и всё выражение обращается в ноль. Поэтому можно сразу расписать на два выражения, равных нулю (возводить в квадраты не нужно).

Отметим ОДЗ: $(x-1)$ должно быть больше либо равно нулю, решаем неравенство и получаем $x \geq 1$.

$$x-1=0$$

$x=0$ (не подходит к ОДЗ)

$x=1$ – это и будет нашим ответом. Обязательно проверка.



Пример 6.

Попробуйте сами:

$$(x^2 - 4)\sqrt{x + 1} = 0$$

$$\text{ОДЗ: } x + 1 \geq 0, x \geq -1$$

Тогда, возводим в квадрат, приравниваем каждую скобку к нулю.

$$(x+1)=0 \text{ следовательно } x=-1$$

$$x^2=2, x^2=-2 \text{ — не подходит к ОДЗ}$$

Ответ: -1; 2.

Пример 7.

$$(x^2 - 3x - 4)\sqrt{2x + 1} = 0$$

$$\text{ОДЗ: } 2x + 1 \geq 0, x \geq -0,5.$$

Как обычно в таких случаях приравниваем каждый множитель к нулю и находим корни:

$$(x^2 - 3x - 4) = 0$$

Квадратное уравнение решаем через дискриминант:

$$x = 4, x = -1$$

$$(2x + 1) = 0$$

$$x = -0,5.$$

В итоге, корень -1 не удовлетворяет нашему ОДЗ, а в ответ отправятся два оставшихся (после проверки).

После решения данных примеров иррациональных уравнений нам нужно подкорректировать алгоритм:

Не всегда нужно возводить в квадрат выражения в уравнениях с радикалом, но ОДЗ в этих случаях учитывать обязательно.