



## «Тригонометрические неравенства»

### Примеры

#### Пример 1.

Решить неравенство:  $\cos x < \frac{1}{2}$

Решение:

Отмечаем на оси косинусов  $\frac{1}{2}$

Все значения  $\cos x$ , меньшие  $\frac{1}{2}$ , — **левее** точки  $\frac{1}{2}$  на оси косинусов.

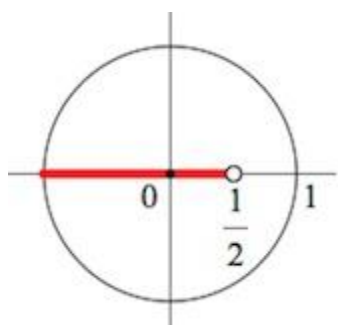


Рис. 3

Отмечаем все точки Рис.3 (дугу, точнее – серию дуг) тригонометрического круга, косинус которых будет меньше  $\frac{1}{2}$

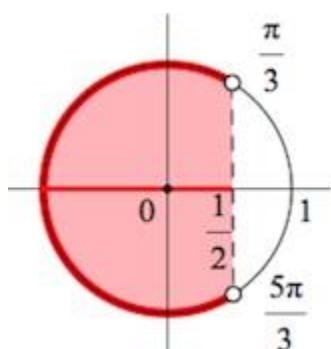


Рис. 4

Полученную дугу мы **проходим против часовой стрелки (!)**

**Рис.4**, то есть от точки  $\frac{\pi}{3}$  до  $\frac{5\pi}{3}$ .

Обратите внимание, многие, назвав первую точку  $\frac{\pi}{3}$  вместо второй точки  $\frac{5\pi}{3}$  указывают точку  $-\frac{\pi}{3}$ , что неверно!

Становится видно, что неравенству удовлетворяют следующие значения  $x$ :

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

**Следите за тем, чтобы «правая/вторая точка» была бы больше «левой/первой».**

**Не забываем «накидывать» счетчик  $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .**

Вот так (Рис.5) выглядит графическое решение неравенства не на тригонометрическом круге, а в прямоугольной системе координат:

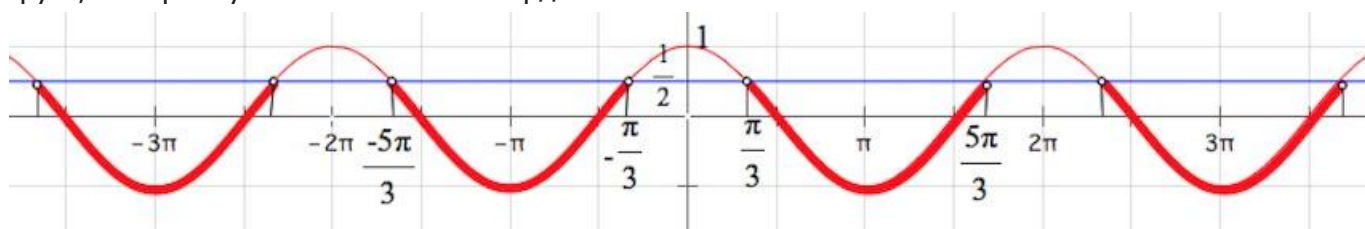


Рис. 5



### Пример 2.

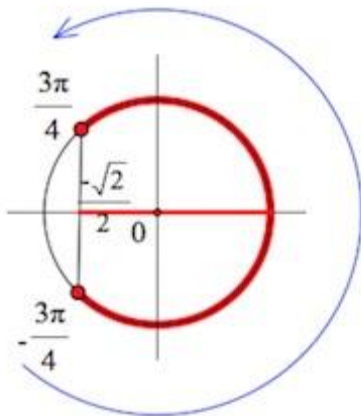
Решить неравенство:  $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

*Решение:*

Отмечаем (Рис. 6) на оси косинусов  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Все значения  $\cos x$ , большие или равные  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  – **правее** точки  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ , включая саму точку.

Тогда выделенные красной дугой аргументы  $x$  отвечают тому условию, что  $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .



$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Рис. 6

### Пример 3.

Решить неравенство:  $\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

*Решение:*

Отмечаем (Рис.7) на оси синусов  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Все значения:  $\sin x$ , большие или равные  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ , – **выше** точки  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ , включая саму точку.

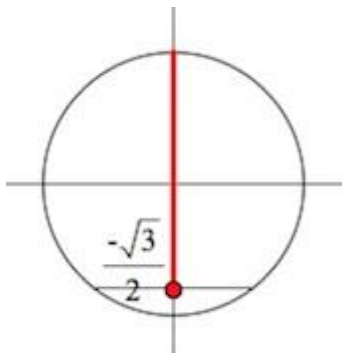
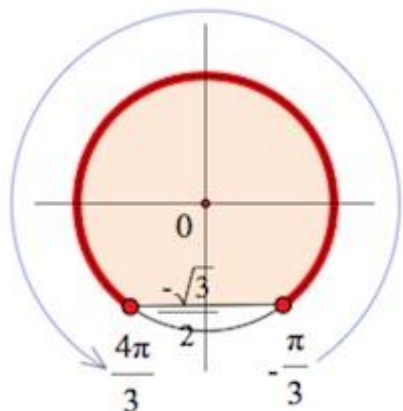


Рис. 7



«Транслируем» выделенные точки на тригонометрический круг (Рис.8):

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

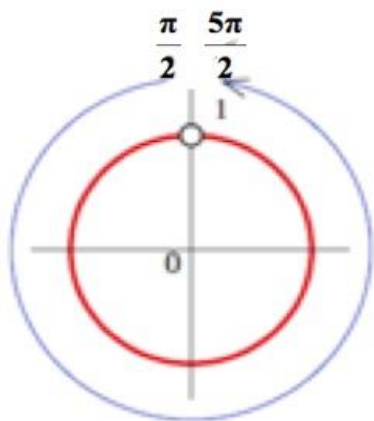
Рис. 8

#### Пример 4.

Решить неравенство:  $\sin x < 1$ .

*Решение:*

Кратко (Рис.9):



$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

или все  $x$ , кроме  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Рис. 9



### Пример 5.

Решить неравенство:  $\sin x \geq 1$ .

*Решение:*

Неравенство  $\sin x \geq 1$  равносильно уравнению  $\sin x = 1$ , так как область значений функции (Рис.10)  $y = \sin x - [-1; 1]$ .

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

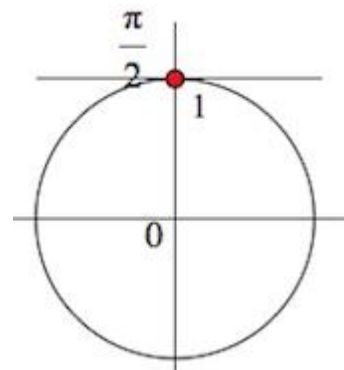


Рис. 10

### Пример 6.

Решить неравенство:  $\sin x < \frac{1}{3}$ .

*Решение:*

Действия – аналогичны применяемым в примерах выше. Но дело мы имеем не с табличным значением синуса.

Здесь, конечно, нужно знать определение арксинуса (Рис.11).

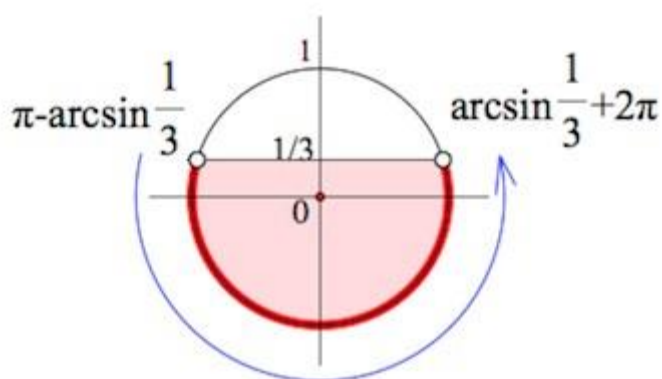


Рис. 11

$$\pi - \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi n < x < \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

**Имейте в виду**, решения (ответы) к одному и тому же неравенству могут выглядеть по-разному, неся один и тот же смысл собою.