



Решение задач по стереометрии

Задание 1***

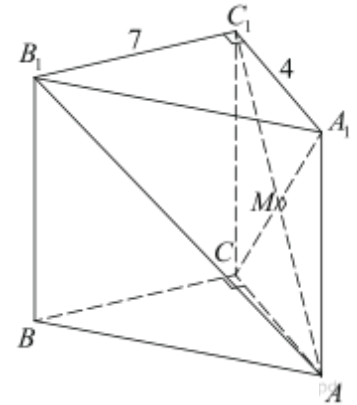
Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Грань ACC_1A_1 является квадратом.

- а) Докажите, что прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.
б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 , если $AC = 4$, $BC = 7$.

Решение:

а) Заметим, что $B_1C_1 \perp C_1A_1$ как катеты прямоугольного треугольника, и $B_1C_1 \perp C_1C$, поскольку призма прямая. Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $B_1C_1 \perp ACA_1$. Кроме того, $A_1C \perp C_1A$ как диагонали квадрата. AB_1 – наклонная, AC_1 – ее проекция на плоскость ACA_1 , A_1C – прямая в плоскости ACA_1 , перпендикулярная проекции. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $AB_1 \perp CA_1$, что и требовалось доказать.

б) Пусть M – середина AC_1 . Тогда искомое расстояние равно расстоянию от точки M до прямой AB_1 , поскольку прямая A_1C перпендикулярна плоскости AB_1C_1 . Это расстояние равно половине высоты прямоугольного треугольника AB_1C_1 , проведённой к гипотенузе, то есть



$$d = \frac{AC_1 \cdot B_1C_1}{2AB_1} = \frac{\sqrt{2}AC \cdot BC}{2\sqrt{2AC^2 + BC^2}} = \frac{14\sqrt{2}}{9}.$$

Ответ: б) $\frac{14\sqrt{2}}{9}$



Задание 2***

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 5$, $AA_1 = 5$, $AD = 3$.

- а) Докажите, что прямые $A_1 B$ и $B_1 D$ перпендикулярны.
б) Найдите расстояние между прямыми $A_1 B$ и $B_1 D$.

Решение:

а) Заметим, что прямая $B_1 A$ является проекцией прямой $B_1 D$ на грань $ABB_1 A_1$. Грань $ABB_1 A_1$ — квадрат, следовательно, прямая AB_1 перпендикулярна прямой $A_1 B$. Таким образом, прямая $B_1 D$ перпендикулярна $A_1 B$ по теореме о трёх перпендикулярах.

б) Заметим, что из п. а) следует, что прямая $A_1 B$ перпендикулярна плоскости $B_1 AD$. Из точки O их пересечения опустим перпендикуляр OH на прямую $B_1 D$. Прямая OH перпендикулярна прямой $A_1 B$ так как лежит в плоскости $B_1 AD$. Таким образом, искомое расстояние — длина OH . Найдём её.

Имеем:

$$B_1 O = \frac{1}{2} AB_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$B_1 D = \sqrt{BB_1^2 + AB^2 + AD^2} = \sqrt{59}.$$

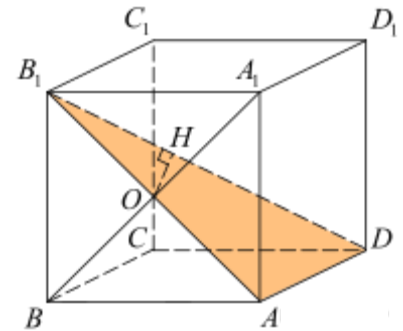
Треугольники $B_1 OH$ и $B_1 AD$ подобны, следовательно,

$$\frac{OH}{AD} = \frac{B_1 O}{B_1 D},$$

откуда

$$OH = \frac{B_1 O \cdot AD}{B_1 D} = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot 3}{\sqrt{59}} = \frac{15\sqrt{118}}{118}.$$

Ответ: $\frac{15\sqrt{118}}{118}$





Задание 3***

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB , равной $8\sqrt{2}$. Высота призмы равна 6.

- а) Докажите, что плоскость, содержащая прямую AC_1 и параллельная прямой CB_1 проходит через середину ребра A_1B_1 .
б) Найдите угол между прямыми AC_1 и CB_1 .

Решение:

Достроим призму до прямоугольного параллелепипеда с основанием $ACBD$ и верхним основанием $A_1C_1B_1D_1$.

а) Прямая AD_1 параллельна прямой CB_1 , поэтому плоскость $C_1AD_1 \parallel CB_1$. $A_1C_1B_1D_1$ — прямоугольник, поэтому его диагонали пересекают друг друга посередине, значит плоскость C_1AD_1 проходит через середину ребра A_1B_1 .

б) Прямая AD_1 параллельна прямой CB_1 , поэтому искомый угол $\angle C_1AD_1$. Из прямоугольного треугольника ACB находим: $AC=8$. Значит, AD тоже равно 8. Из прямоугольных треугольников ACC_1 и ADD_1 получаем: $AC_1=AD_1=10$, а диагональ C_1D_1 квадрата $A_1C_1B_1D_1$ равна $8\sqrt{2}$. Из равнобедренного треугольника $A_1C_1A_1D_1$ получаем:

$$\angle C_1AD_1 = 2 \arcsin \frac{CD_1}{2AC_1} = 2 \arcsin \frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

Примечание:

Для нахождения угла можно воспользоваться теоремой косинусов:

$$\begin{aligned} C_1D_1^2 &= AC_1^2 + AD_1^2 - 2AC_1 \cdot AD_1 \cdot \cos \angle C_1AD_1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 128 &= 100 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos \angle C_1AD_1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos \angle C_1AD_1 &= \frac{9}{25}. \end{aligned}$$

Ответ: $2 \arcsin \frac{2\sqrt{2}}{5}$ или $\arccos \frac{9}{25}$

