



«Решение задач по стереометрии (теория, практика)»

Нахождение угла между прямой и плоскостью

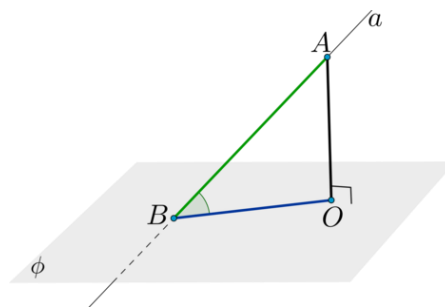
Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость (т.е. это угол $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$).

Чтобы найти угол между прямой a и плоскостью ϕ ($a \cap \phi = B$), нужно:

Шаг 1: из какой-то точки $A \in a$ провести перпендикуляр AO на плоскость ϕ (O – основание перпендикуляра);

Шаг 2: тогда BO – проекция наклонной AB на плоскость ϕ ;

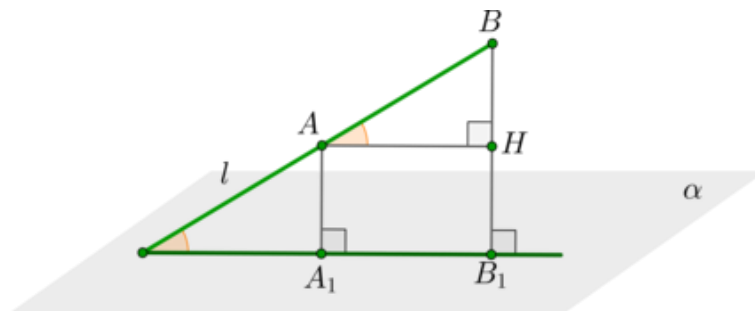
Шаг 3: тогда угол между прямой a и плоскостью ϕ равен $\angle ABO$.



Практика

Задание 1*

Прямая l пересекает плоскость α .
На прямой l отмечен отрезок $AB = 25$, причем известно, что проекция этого отрезка на плоскость α равна 24. Найдите синус угла между прямой l и плоскостью α .



Решение:

1. Пусть $A_1B_1 = 24$ – проекция AB на плоскость α , значит, $AA_1 \perp \alpha, BB_1 \perp \alpha$.
2. Так как две прямые, перпендикулярные к плоскости, лежат в одной плоскости, то A_1ABB_1 – прямоугольная трапеция.
3. Проведем $AH \perp BB_1$. Тогда $AH = A_1B_1 = 24$.
4. Следовательно, по теореме Пифагора $HB = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 7$.
5. Заметим также, что угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и ее проекцией на плоскость, следовательно, искомый угол – угол между AB и A_1B_1 .
6. Так как $AH \parallel A_1B_1$, то угол между AB и A_1B_1 равен углу между AB и AH .
7. Тогда $\sin \angle BAH = \frac{BH}{AB} = \frac{7}{25} = 0,28$.

Ответ: 0,28

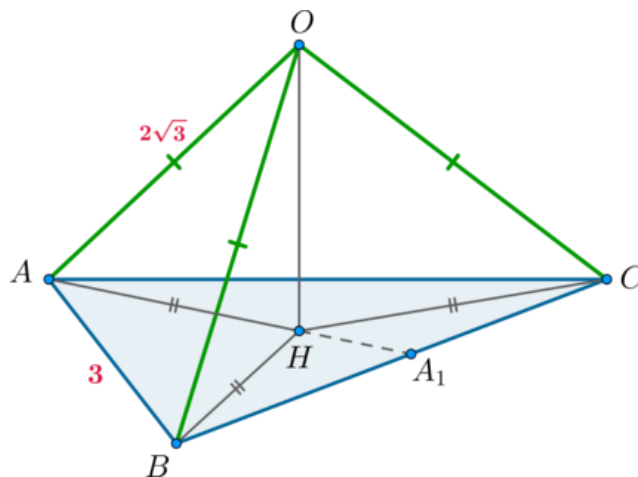


Задание 2*

ABC – правильный треугольник со стороной 3, O – точка, лежащая вне плоскости треугольника, причем $OA = OB = OC = 2\sqrt{3}$. Найдите угол, который образуют прямые OA, OB, OC с плоскостью треугольника. Ответ дайте в градусах.

Решение:

1. Проведем перпендикуляр OH на плоскость треугольника.
2. Рассмотрим $\triangle OAH$, $\triangle OBH$, $\triangle OCH$. Они являются прямоугольными и равны по катету и гипотенузе. Следовательно, $AH = BH = CH$. Значит, H – точка, находящаяся на одинаковом расстоянии от вершин треугольника ABC . Следовательно, H – центр описанной около него окружности.
3. Так как $\triangle ABC$ – правильный, то H – точка пересечения медиан (они же высоты и биссектрисы).
4. Так как угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость, а AH – проекция AO на плоскость треугольника, то угол между AO и плоскостью треугольника равен $\angle OAH$.
5. Пусть AA_1 – медиана в $\triangle ABC$, следовательно, $AA_1 = \sqrt{AB^2 - BA_1^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
6. Так как медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины, то $AH = \frac{2}{3}AA_1 = \sqrt{3}$.
7. Тогда из прямоугольного $\triangle OAH$: $\cos \angle OAH = \frac{AH}{AO} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle OAH = 60^\circ$.
8. Заметим, что из равенства треугольников OAH , OBH , OCH следует, что $\angle OAH = \angle OBH = \angle OCH = 60^\circ$.



Ответ: 60



Задание 3*

Чему равен $\operatorname{ctg}^2 \alpha$, если α – угол наклона диагонали куба к одной из его граней?

Решение:

Искомый угол будет совпадать с углом между диагональю куба и диагональю любой его грани, т.к. в данном случае диагональ куба будет являться наклонной, диагональ грани – проекцией этой наклонной на плоскость грани.

Таким образом, искомый угол будет равен, например, углу C_1AC .

Если обозначить ребро куба за x , то $AC = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2}x$, тогда квадрат котангенса искомого угла: $\operatorname{ctg}^2 \alpha = (AC:CC_1)^2 = (\sqrt{2}x:x)^2 = 2$.

Ответ: 2

