



Площади, решение задач

Практические задания

Задание 1***

На диагонали параллелограмма взяли точку, отличную от её середины. Из неё на все стороны параллелограмма (или их продолжения) опустили перпендикуляры.

а) Докажите, что четырёхугольник, образованный основаниями этих перпендикуляров, является трапецией.

б) Найдите площадь полученной трапеции, если площадь параллелограмма равна 16, а один из его углов равен 60° .

Решение.

а) Возьмём на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ точку O (не посередине) и проведём через неё перпендикуляры NL и KM к сторонам параллелограмма (см. рис.). Прямоугольные треугольники CKO и AMO подобны.

Точно так же подобны треугольники CNO и ALO :

$$OK:OM = OC:OA = ON:OL.$$

Отсюда следует подобие треугольников ONK и OLM . Тогда накрестлежащие углы OML и OKN равны, а поэтому прямые NK и ML параллельны. Следовательно, четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм или трапеция.

Докажем, что это трапеция. Если $KLMN$ — параллелограмм, то $ON = OL$.

В этом случае $OC = OA$, то есть O — середина AC . Противоречие. Значит, $KLMN$ — трапеция.

б) Обозначим площадь параллелограмма S , а его острый угол — α . Угол между диагоналями NL и KM трапеции $KLMN$ равен углу между перпендикулярными диагоналями прямыми BC и CD , то есть этот угол равен α .

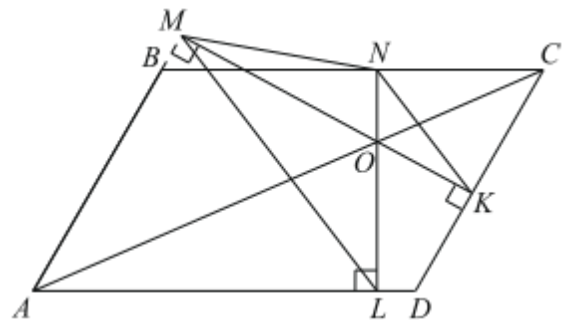
Поэтому площадь трапеции равна: 60°

$$\frac{1}{2} * NL * KM * \sin \alpha = \frac{1}{2} * \frac{S}{AD} * \frac{S}{AB} * \sin \alpha = \frac{S * AD * AB * \sin^2 \alpha}{2 * AD * AB} = \frac{S * \sin^2 \alpha}{2}$$

Подставляя $\alpha = 60^\circ$ и $S = 16$, получаем, что площадь трапеции равна

$$\frac{16 * \sin^2 60^\circ}{2} = \frac{16 * 3}{8} = 6$$

Ответ: 6.





Задание 2***

Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$.

а) Докажите, что отрезки LN и KM , соединяющие середины его противоположных сторон, делят друг друга пополам.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если $LM=3\sqrt{3}$, $KM=6\sqrt{3}$, $\angle KML=60^\circ$

Решение.

а) Пусть K , L , M и N — середины сторон AB , BC , CD и AD четырёхугольника $ABCD$ соответственно. Тогда KL и MN — средние линии треугольников ABC и ADC . Значит, $KL = \frac{1}{2}AC = NM$ и $KL \parallel AC \parallel MN$, поэтому $KLMN$ — параллелограмм. Его диагонали KM и LN делят друг друга пополам, что и требовалось доказать.

б) В треугольнике KLM имеем:
 $KL^2 = KM^2 + LM^2 - 2KM \cdot LM \cdot \cos 60^\circ = 81$.

Значит, $KL = 9$. Тогда $KM^2 = KL^2 + LM^2$, поэтому треугольник KLM — прямоугольный с прямым углом при вершине L . Четырёхугольник $KLMN$ — прямоугольник, поэтому $S_{KLMN} = KL \cdot LM = 9 \cdot 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$.

Отрезок KL является средней линией треугольника ABC , поэтому $S_{KBL} = \frac{1}{4} S_{ABC}$. Аналогично $S_{MDC} = \frac{1}{4} S_{ADC}$.

Тогда имеем $S_{KBL} + S_{MDN} = \frac{1}{4} S_{ABC} + \frac{1}{4} S_{ADC} = \frac{1}{4} (S_{ABC} + S_{ADC}) = \frac{1}{4} S$.

Где S — искомая площадь четырёхугольника $ABCD$. Аналогично $S_{CML} + S_{AKN} = \frac{1}{4} S$.

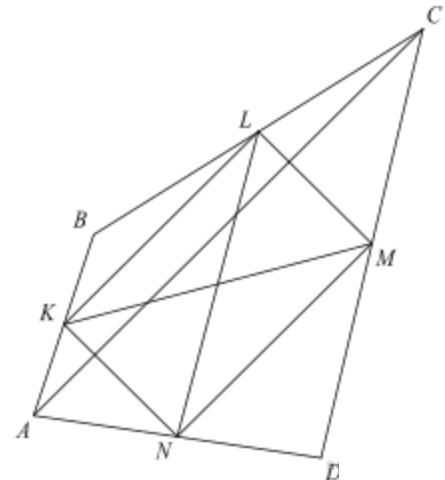
Поэтому

$$S_{KLMN} = S - \frac{1}{4}S - \frac{1}{4}S = \frac{1}{2}S$$

Следовательно,

$$S = 2S_{KLMN} = 2 \cdot 27\sqrt{3} = 54\sqrt{3}.$$

Ответ: $54\sqrt{3}$





Задание 3***

В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH , из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC .

б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH = 2$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен 4.

Решение.

а) Пусть угол $BAC = \alpha$. Углы BAC и KHB равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Рассмотрим четырёхугольник $BKHM$: в нём $\angle BKH + \angle BMH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, следовательно, четырёхугольник $BKHM$ вписан в окружность. Значит, углы KHB и KMB — вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу, следовательно, они равны. Таким образом, $\angle BAC = \angle KHB = \angle KMB$. Треугольники ABC и MBK имеют общий угол B , а $\angle BAC = \angle KMB$, значит, эти треугольники подобны по двум углам.

б) Из прямоугольного треугольника BKH находим, что $BH = \frac{BK}{\sin \angle KHB}$.

Для треугольника ABC справедливо равенство $2R = \frac{BC}{\sin \angle BAC}$.

Учитывая, что $\angle KHB = \angle BAC$, получаем: $\frac{BC}{BK} = \frac{2R}{BH}$.

Стороны BC и BK — сходственные в подобных треугольниках ABC и MBK , следовательно, их коэффициент подобия $k = \frac{BC}{BK} = \frac{2R}{BH} = 4$.

Найдём отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$:

$$\frac{S_{MBK}}{S_{AKMC}} = \frac{S_{MBK}}{S_{ABC} - S_{MBK}} = \frac{S_{MBK}}{k^2 S_{MBK} - S_{MBK}} = \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{16 - 1} = \frac{1}{15}$$

Ответ: $\frac{1}{15}$

