

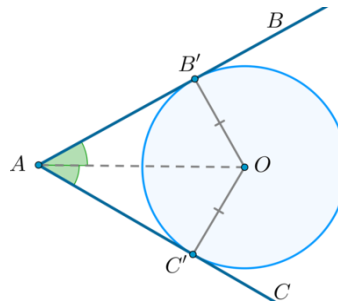


«Вписанные и описанные окружности, решение задач»

Окружность, вписанная в многоугольник или угол

Определения

1. Окружность S вписана в угол α , если S касается сторон угла α .
2. Окружность S вписана в многоугольник P , если S касается всех сторон P . В этом случае многоугольник P называется описанным около окружности.

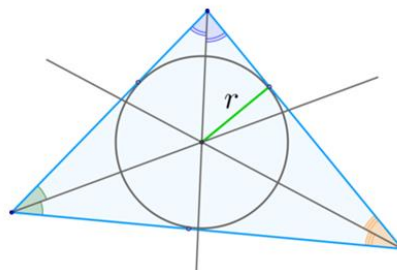


Теорема

Центр вписанной в угол окружности лежит на его биссектрисе.

Теорема

В любой треугольник можно вписать единственную окружность, причём центр этой вписанной окружности есть точка пересечения биссектрис треугольника.



Следствие

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Теорема о площади описанного треугольника

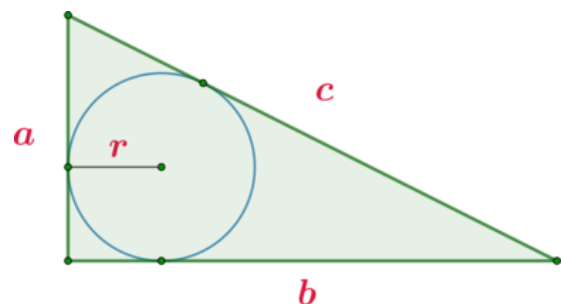
Если a, b, c – стороны треугольника, а r – радиус вписанной в него окружности, то площадь треугольника

$$S_{\Delta} = p \cdot r,$$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$ – полупериметр треугольника.

Если в прямоугольный треугольник вписана окружность, a, b – катеты, c – гипотенуза, r – радиус этой окружности, то верна формула:

$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

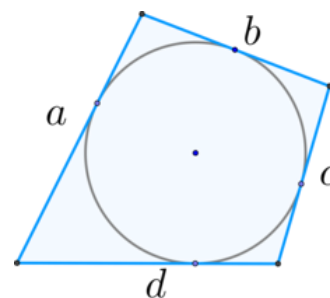




Следствие

Если в многоугольник вписана окружность и r – ее радиус, то площадь многоугольника равна произведению полупериметра многоугольника на r :

$$S_{\text{опис.много-к}} = p \cdot r$$



(рис. 2)

Теорема

В выпуклый четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны.

Теоремы

1. Если в параллелограмм вписана окружность, то он – ромб (рис. 1).
2. Если в прямоугольник вписана окружность, то он – квадрат (рис. 2).

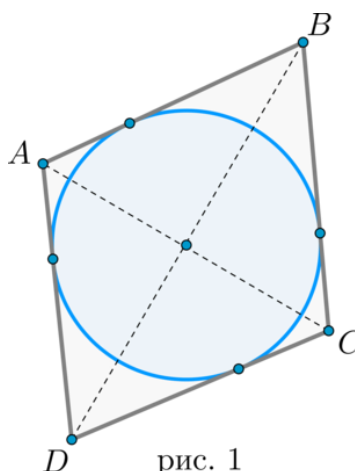


рис. 1

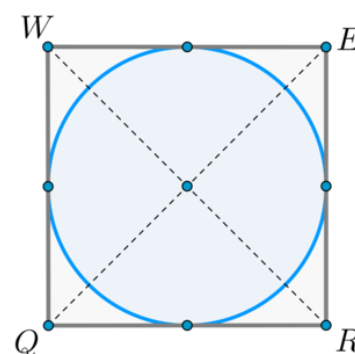


рис. 2

Верны и обратные утверждения: в любой ромб и квадрат можно вписать окружность, и притом только одну.

Практика

Задание 1

Три стороны описанного около окружности четырехугольника относятся (в последовательном порядке) как 2:3:6. Найдите большую сторону этого четырехугольника, если известно, что его периметр равен 54.

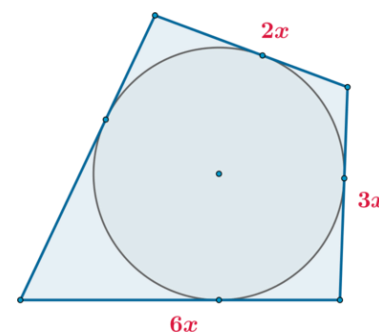
Решение:

1. Так как четырехугольник описан около окружности, то суммы его противоположных сторон равны.
2. Следовательно, четвертая сторона равна
 $(2x + 6x) - 3x = 5x$.

Тогда можно составить уравнение:

$$\begin{aligned} 2x + 3x + 6x + 5x &= 54 \Leftrightarrow \\ 6x &= 20,25 \text{ (большая сторона равна } 6x) \end{aligned}$$

Ответ: 20,25



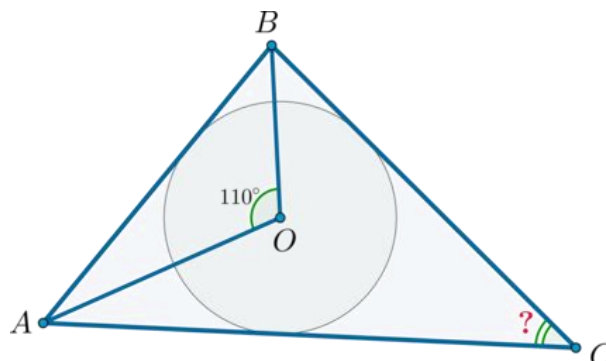


Задание 2

В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке O , причем $\angle AOB = 110^\circ$. Найдите $\angle C$ треугольника ABC . Ответ дайте в градусах.

Решение:

1. Т.к. центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис углов треугольника, то AO, BO – биссектрисы углов A, B соответственно.
2. Следовательно, $\angle BAO + \angle ABO = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.
3. Также $\angle A + \angle B = 2 \cdot (\angle BAO + \angle ABO) = 140^\circ$, следовательно, $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.



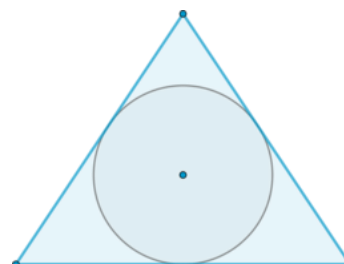
Ответ: 40

Задание 3

Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, основание равно 6. Найдите радиус вписанной окружности.

Решение:

1. Известно, что для любого треугольника $S_{\Delta} = p \cdot r$, где p – полупериметр, r – радиус вписанной окружности. В нашем случае по формуле Герона (полупериметр $p = 8$)
 $S_{\Delta} = \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2} = 4 \cdot 3 = 12$.
2. Следовательно, $r = \frac{S}{p} = \frac{12}{0,5(5+5+6)} = 1,5$



Ответ: 1,5

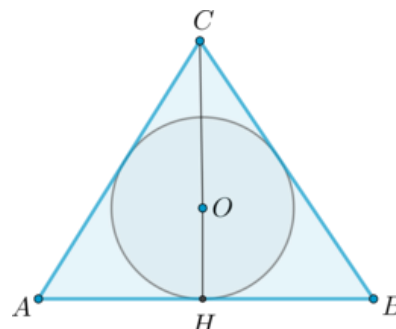
Задание 4

Сторона правильного треугольника равна 3. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Решение:

1 способ.

1. Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис.
2. Так как треугольник правильный, то его биссектрисы также являются высотами и медианами.
3. Пусть H – точка касания окружности со стороной AB (то есть OH – радиус). Следовательно, $OH \perp AB$ (как часть





высоты) и $OH = \frac{1}{3}CH$ (как часть медианы, так как медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины).

4. Если $AC = 2x = \sqrt{3}$, то $AH = x$, следовательно, $CH = \sqrt{4x^2 - x^2} = x\sqrt{3}$, тогда $OH = \frac{1}{3} \cdot CH = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,5$

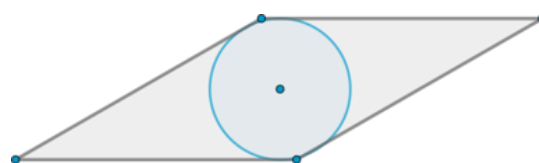
Ответ: 0,5

Задание 5

Острый угол ромба равен 30° , радиус вписанной в этот ромб окружности равен 2. Найдите сторону ромба.

Решение:

1. Для любого многоугольника, в который можно вписать окружность, верно $S = p \cdot r$, где p – полупериметр, а r – радиус вписанной окружности.
2. $S_{\text{ромб}} = S = a^2 \cdot \sin \alpha$, где a – сторона ромба, α – его угол. Следовательно, $S = a^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a^2$. Полупериметр ромба равен $2a$. Тогда $\frac{1}{2}a^2 = 2a \cdot 2 \Rightarrow a = 8$



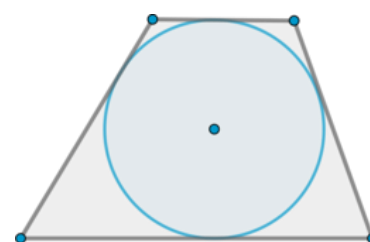
Ответ: 8

Задание 6

Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 9 и 12. Найдите среднюю линию трапеции.

Решение:

1. Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны. Следовательно, сумма оснований трапеции равна сумме боковых сторон, то есть равна $9 + 12 = 21$.
2. Так как средняя линия трапеции равна полусумме оснований, то $21 : 2 = 10,5$.



Ответ: 10,5



Задание 7

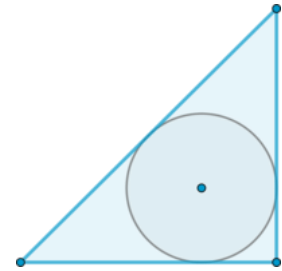
Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника равны $2 + \sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Решение

1. Известно, что для любого треугольника $S_{\Delta} = p \cdot r$, где p – полупериметр, r – радиус вписанной окружности.
2. В нашем случае $S_{\Delta} = 0,5 \cdot (2 + \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})$.
3. Гипотенуза по теореме Пифагора равна $\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})$, следовательно,

$$r = \frac{S}{p} = \frac{0,5(2 + \sqrt{2})^2}{0,5(2 + \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}(2 + \sqrt{2}))} = 1$$

Ответ: 1



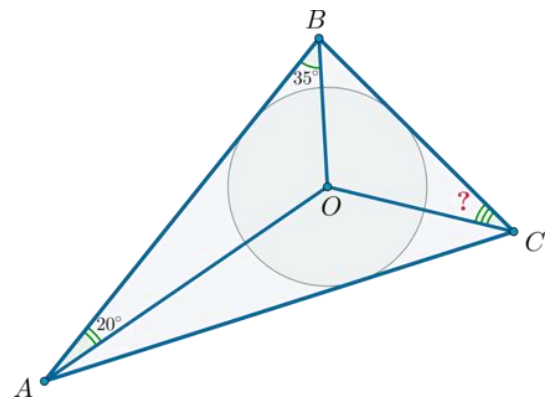
Задание 8

В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке O , причем $\angle BAO = 20^\circ$, $\angle OBA = 35^\circ$. Найдите $\angle BCO$. Ответ дайте в градусах.

Решение:

1. Т.к. центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис углов треугольника, то AO, BO, CO – биссектрисы углов A, B, C соответственно.
2. Следовательно, $\angle A + \angle B + \angle C = 2\angle BAO + 2\angle ABO + 2\angle BCO = 180^\circ$, откуда $\angle BCO = 90^\circ - \angle BAO - \angle ABO = 90^\circ - 20^\circ - 35^\circ = 35^\circ$.

Ответ: 35



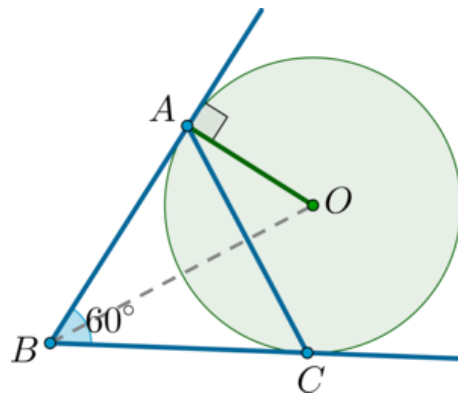


Задание 9*

Окружность вписана в угол B , равный 60° . Найдите радиус этой окружности, если расстояние между точками касания окружности и сторон угла равно $3\sqrt{3}$.

Решение:

1. Обозначим точки касания окружности и сторон угла за A и C . Тогда известно, что $AC = 3\sqrt{3}$.
2. Пусть также O – центр окружности. Тогда OA – радиус окружности, причем $OA \perp BA$ (т.к. BA – касательная, а радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной).
3. Рассмотрим $\triangle ABC$: он равнобедренный ($AB = BC$ как отрезки касательных, проведенных из одной точки), следовательно, $\angle A = \angle C = 0,5 \cdot (180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$. Таким образом, он равносторонний, следовательно, $AB = AC = 3\sqrt{3}$.
4. Т.к. окружность вписана в угол, то ее центр лежит на биссектрисе этого угла, то есть $\angle ABO = 30^\circ$.
5. Тогда из прямоугольного $\triangle ABO$: $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{OA}{BA} = \frac{OA}{3\sqrt{3}} \Rightarrow OA = 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 3$.



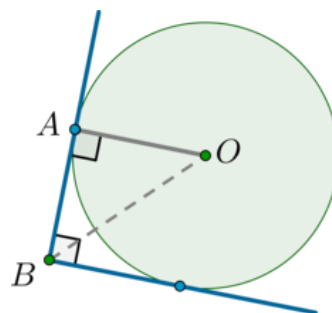
Ответ: 3

Задание 10*

Окружность вписана в угол B , равный 90° . Найдите расстояние от вершины угла до центра этой окружности, если радиус этой окружности равен $\sqrt{2}$.

Решение:

1. Обозначим одну из точек касания окружности и сторон угла за A . Пусть также O – центр окружности. То есть необходимо найти OB .
2. $OA = \sqrt{2}$ – радиус окружности, причем $OA \perp BA$ (т.к. BA – касательная, а радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной).
3. Т.к. окружность вписана в угол, то ее центр лежит на биссектрисе этого угла, то есть $\angle ABO = 45^\circ$.
4. Тогда прямоугольный $\triangle ABO$ является равнобедренным, то есть $AB = OA = \sqrt{2}$.
5. По теореме Пифагора: $OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = 2$.



Ответ: 2