



«Вписанные и описанные окружности, решение задач»

Окружность, описанная около многоугольника

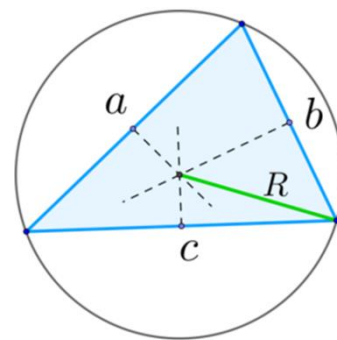
Определение

Окружность S описана около многоугольника P , если все вершины многоугольника P лежат на окружности S .

В этом случае многоугольник P называется вписанным в окружность.

Теорема

Около любого треугольника можно описать единственную окружность, причём центр описанной окружности есть точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.



Для вписанного треугольника верна формула

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R,$$

где α – угол треугольника, лежащий против стороны a .

Теорема о площади вписанного треугольника

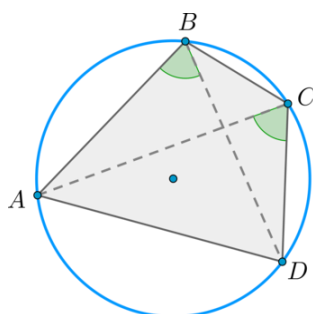
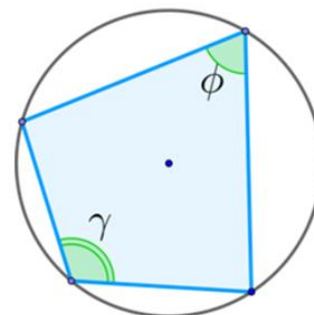
Если a, b, c – стороны треугольника, а R – радиус описанной около него окружности, то площадь треугольника

$$S_{\Delta} = \frac{abc}{4R}$$

Теорема

Если около выпуклого четырехугольника описана окружность, то сумма его противоположных углов равна $\angle \phi + \angle \gamma = 180^\circ$.

И наоборот: Если сумма двух противоположных углов выпуклого четырехугольника равна $\angle \phi + \angle \gamma = 180^\circ$, то около него можно описать окружность.



Теорема

Около выпуклого четырехугольника ABCD можно описать окружность тогда и только тогда, когда $\angle ABD = \angle ACD$.



Площадь вписанного четырехугольника вычисляется по формуле

$$S_{\text{впис.4-к}} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где a, b, c, d – его стороны, $p = \frac{(a+b+c+d)}{2}$ – полупериметр.

Теоремы

1. Если около параллелограмма описана окружность, то он – прямоугольник (рис. 1).
2. Если около ромба описана окружность, то он – квадрат (рис. 2).
3. Если около трапеции описана окружность, то она равнобедренная (рис. 3).

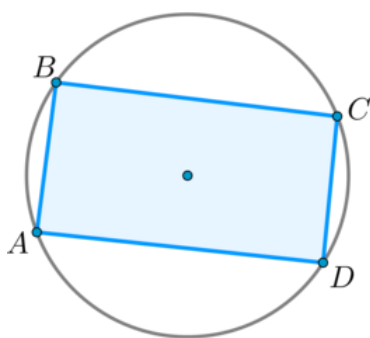


рис. 1

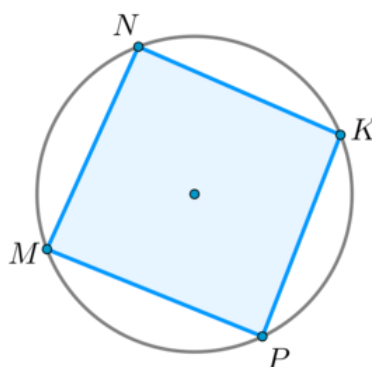


рис. 2

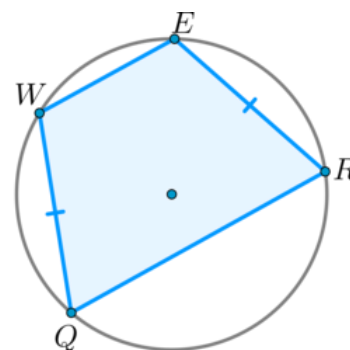


рис. 3

Верны и обратные утверждения: около прямоугольника, ромба и равнобедренной трапеции можно описать окружность, и притом только одну.

Практика

Задание 1

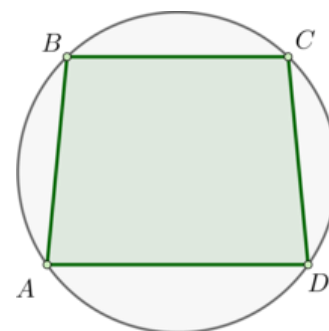
Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 22, средняя линия равна 5. Найдите боковую сторону трапеции.

Решение:

1. Так как трапеция вписана в окружность, то трапеция является равнобедренной, следовательно, $AB = CD$.
2. Средняя линия равна полусумме оснований, следовательно, $AD + BC = 2 \cdot 5 = 10$.
3. Тогда $AB + BC + CD + AD = 10 + 2AB = 22 \Rightarrow AB = 6$.

Ответ: 6

Задание 2

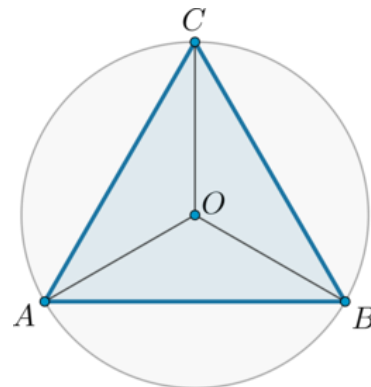




Сторона правильного треугольника равна 3. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Решение:

1. По теореме синусов $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ где a – сторона треугольника, α – противолежащий этой стороне угол, R – радиус описанной окружности.
2. Так как в правильном треугольнике все углы равны по 60° , то $2R = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 \Rightarrow R = 1$



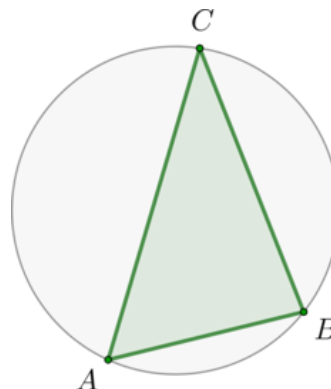
Ответ: 1

Задание 3

Сторона AB треугольника ABC равна 1. Противолежащий ей угол C равен 30° . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Решение:

1. По теореме синусов $\frac{AB}{\sin \angle C} = 2R$
2. Следовательно, $R = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1$



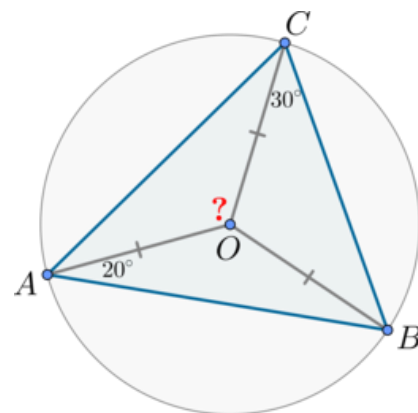
Ответ: 1

Задание 4

Около треугольника ABC описана окружность с центром в точке O. $\angle BAO = 20^\circ$, $\angle BCO = 30^\circ$. Найдите $\angle AOC$. Ответ дайте в градусах.

Решение:

1. Т.к. треугольники AOB, BOC – равнобедренные, то $\angle OBA = \angle OAB = 20^\circ$, $\angle OBC = \angle OCB = 30^\circ$.
2. Следовательно, $\angle B = 20^\circ + 30^\circ = 50^\circ$.
3. Т.к. $\angle AOC$ – центральный угол, опирающийся на ту же дугу AC, что и вписанный $\angle B$, то $\angle AOC = 2\angle B = 100^\circ$.



Ответ: 100

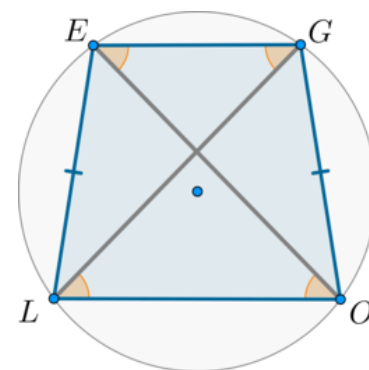
Задание 5

Во вписанном четырехугольнике LEGO стороны LE и GO равны. Найдите сумму углов $\angle L$ и $\angle E$. Ответ дайте в градусах.



Решение:

1. Т.к. хорды LE и GO равны, то равны дуги $\widehat{LE}$ и $\widehat{GO}$.
2. Следовательно, вписанные углы, опирающиеся на эти дуги, будут тоже равны: $\angle LOE = \angle LGE = \angle OLG = \angle OEG$
3. Таким образом, $LEGO$ – трапеция ($\angle LOE = \angle OEG$ – накрест лежащие при прямых EG и LO и секущей EO).
4. Значит, $\angle L + \angle E = 180^\circ$, как сумма односторонних углов при параллельных прямых.



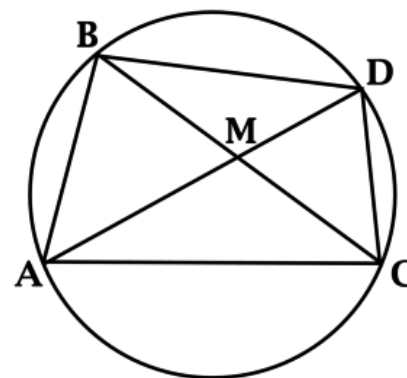
Ответ: 180

Задание 6*

Треугольники ABC и ADC имеют общее основание, $\angle ABC = \angle ADC$, M – точка пересечения AD и BC , $AM = 10$, $MD = 6$, $BM = 8$. Найдите MC .

Решение:

1. Так как $\angle ABC = \angle ADC$, то около четырёхугольника $ABDC$ можно описать окружность.
2. Покажем это: $\angle AMB$ и $\angle DMC$ – вертикальные, тогда $\angle AMB = \angle DMC$; $\angle ABC = \angle ADC$, тогда треугольники ABM и DCM – подобны по двум углам, откуда получаем: $\frac{AM}{MC} = \frac{BM}{MD}$, но углы BMD и AMC также вертикальные, тогда $\angle BMD = \angle AMC$ и треугольники BMD и AMC – подобны, так как если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, а стороны, образующие этот угол в одном треугольнике, пропорциональны соответствующим сторонам другого, то такие треугольники подобны.
3. Из подобия получаем: $\angle CBD = \angle CAD$, $\angle MCD = \angle BAM$, тогда $\angle ABC + \angle CBD + \angle ACB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CAD + \angle ACB + \angle BAM = 180^\circ$, так как это сумма углов треугольника ABC .
4. Если в выпуклом четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180° то около него можно описать окружность, тогда около $ABDC$ можно описать окружность.
5. Так как произведение отрезков одной из пересекающихся хорд равно произведению отрезков другой, то $AM \cdot MD = BM \cdot MC$, то есть $60 = 8 \cdot MC$, откуда $MC = 7,5$.



Ответ: 7,5

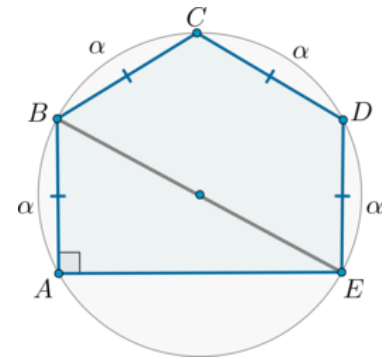


Задание 7*

Около пятиугольника $ABCDE$ описана окружность, причем $AB = BC = CD = DE = 4\sqrt{3}$, $\angle A = 90^\circ$. Найдите AE .

Решение:

1. Т.к. равные хорды стягивают равные дуги, то меньшие полуокружности дуги $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DE}$ равны: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \alpha$.
2. Следовательно, $\angle A = 90^\circ = 32\alpha$, откуда $\alpha = 60^\circ$.
3. Значит, вписанный $\angle AEB = 12\alpha = 30^\circ$.
4. Следовательно, из прямоугольного треугольника AEB $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{AB}{AE} \Rightarrow AE = 12$.



Ответ: 12