



Вписанные и описанные окружности, решение задач

Дополнительные задания

Задание 1***

Прямые, содержащие катеты AC и CB прямоугольного треугольника ACB , являются общими внутренними касательными к окружностям радиусов 2 и 4. Прямая, содержащая гипотенузу AB , является их общей внешней касательной.

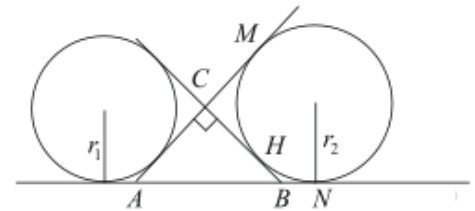
а) Докажите, что длина отрезка внутренней касательной, проведенной из вершины острого угла треугольника до одной из окружностей, равна половине периметра треугольника ACB .

б) Найдите площадь треугольника ACB .

Решение:

а) Введём обозначения, как показано на рисунке, пусть M, H, N — точки касания. Касательные, проведённые к окружности из одной точки

равны: $AM = AN$, $CM = CH$, $HB = BN$. Поэтому:
 $P = AC + CH + HB + AB = AC + CM + BN + AB = AM + AN = 2AM$
откуда $p = AM$.



б) Для определения площади треугольника используем формулу, связывающую её с полупериметром, стороной и радиусом вневписанной окружности, касающейся этой стороны и продолжений двух других сторон треугольника:

$$s = (p - AC) \cdot r_1 = (AM - AC) \cdot r_1 = CM \cdot r_1 = r_2 \cdot r_1 = 8$$

Ответ: $S_{ACB} = 8$

Примечание: указанная в решении формула легко может быть получена из следующих соображений

$$S_{ACB} = S_{ABCO_1} - S_{ACO_1},$$

где O_1 — центр окружности с радиусом r_1 .

При этом

$$S_{ACO_1} = \frac{1}{2} AC \cdot r_1, \quad S_{ABCO_1} = S_{ABO_1} + S_{BCO_1} = \frac{1}{2} AB \cdot r_1 + \frac{1}{2} BC \cdot r_1 = \frac{1}{2} (AB + BC) \cdot r_1$$

$$\text{Тогда } S_{ACB} = \frac{1}{2} ((AB + BC) \cdot r_1 - AC \cdot r_1) = \frac{1}{2} ((AB + BC + AC) - AC) \cdot r_1 = \frac{1}{2} (P_{ABC} - AC) \cdot r_1$$

$$r_1 = (p - AC) \cdot r_1.$$



Задание 2***

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AP и CQ .

- а) Докажите, что угол PAC равен углу PQC .
б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если известно, что $PQ = 8$ и $\angle ABC = 60^\circ$.

Решение:

а) Углы APC и AQC — прямые, значит, точки A, Q, P и C лежат на одной окружности с диаметром AC , и, следовательно, равны и вписанные углы PAC и PQC этой окружности, опирающиеся на дугу PC , что и требовалось доказать.

б) Прямоугольные треугольники ABP и CBQ имеют общий угол ABC , следовательно, они подобны, откуда

$$\frac{BQ}{BP} = \frac{BC}{BA} \text{ или } \frac{BQ}{BC} = \frac{BP}{BA},$$

но тогда и треугольники BAC и BPQ также подобны, причем коэффициент подобия равен

$$\frac{BQ}{BC} = \frac{BP}{BA} = \cos \angle ABC,$$

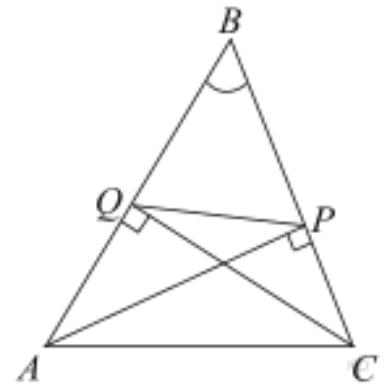
откуда

$$AC = \frac{PQ}{\cos \angle ABC} = \frac{8}{\cos 60^\circ} = 16.$$

Тогда радиус R окружности, описанной около треугольника ABC равен

$$R = \frac{AC}{2 \sin \angle ABC} = \frac{16}{2 \sin 60^\circ} = \frac{16}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{16}{\sqrt{3}}$.





Задание 3***

В остроугольном треугольнике KMN проведены высоты KB и NA .

а) Докажите, что угол ABK равен углу ANK .

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABM , если известно, что $KN = 8\sqrt{2}$ и $\angle KMN = 45^\circ$.

Решение:

а) Углы NAK и NBK , опирающиеся на отрезок KN , равны, значит, точки A , B , N и K лежат на одной окружности, а, следовательно, равны и вписанные углы ABK и ANK этой окружности, опирающиеся на дугу AK , что и требовалось доказать.

б) Прямоугольные треугольники KMB и NMA имеют общий угол KMN , следовательно, они подобны, откуда

$$\frac{AM}{BM} = \frac{MN}{MK} \text{ или } \frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MK},$$

но тогда и треугольники KMN и BMA также подобны, причем коэффициент подобия равен

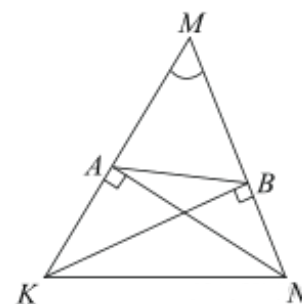
$$\frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MK} = \cos \angle KMN,$$

Откуда

$$AB = KN \cos \angle KMN = 8\sqrt{2} \cos 45^\circ = 8.$$

Тогда радиус R окружности, описанной около треугольника ABM равен

$$R = \frac{AB}{2 \sin \angle AMB} = \frac{8}{2 \sin 45^\circ} = 4\sqrt{2}.$$



Ответ: $4\sqrt{2}$.



Задание 4***

Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $BK = OK$.

а) Докажите, что четырехугольник $ABKC$ вписанный.

б) Найдите длину отрезка AO , если известно, что радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC равны 3 и 12 соответственно, а $OK = 5$.

Решение:

а) Пусть $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$.

Так как O — центр вписанной окружности треугольника ABC то AO , BO — биссектрисы углов A и B значит, $\angle BAO = \alpha$, $\angle ABO = \beta$.

Угол BOK внешний для треугольника AOB поэтому $\angle BOK = \alpha + \beta$. (см. рисунок).

Так как $BK = OK$ (по построению), то $\angle OBK = \angle BOK = \alpha + \beta$, тогда $\angle CBK = \angle OBK - \angle CBO = \alpha + \beta - \beta = \alpha$.

Углы CBK и KAC опираются на один и тот же отрезок CK и равны друг другу: $\angle CBK = \angle KAC = \alpha$.

Тогда по признаку, связанному со свойством вписанных углов, точки A, B, K, C лежат на одной окружности.

б) Обозначим через r , R радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC .

Пусть H — проекция точки O на сторону AB (см. рис.), тогда $OH = r$, $AO = \frac{r}{\sin \alpha}$.

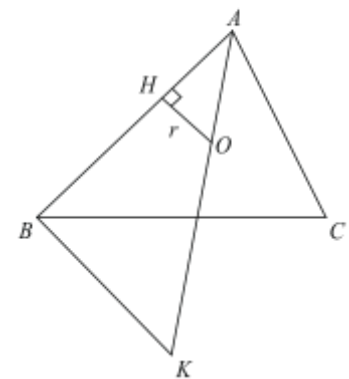
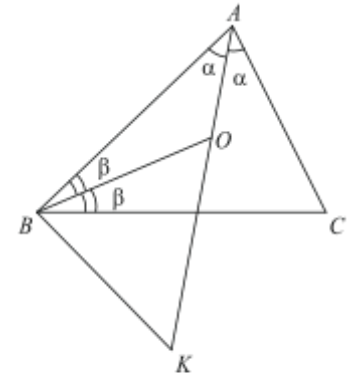
Так как точки A, B, K, C лежат на одной окружности, то радиус описанной окружности треугольника ABK совпадает с радиусом описанной окружности треугольника ABC и равен R . Из треугольника ABK по теореме синусов:

$$\frac{BK}{\sin \alpha} = 2R, \sin \alpha = \frac{BK}{2R}.$$

$$\text{Тогда } AO = \frac{r}{\sin \alpha} = \frac{r}{\frac{BK}{2R}} = \frac{r \cdot 2R}{BK}.$$

Так как $r = 3$, $R = 12$, $BK = OK = 5$,

$$\text{то } AO = \frac{3 \cdot 24}{5} = 14,4$$



Ответ: 14,4.