



«Четырехугольники, решение задач»

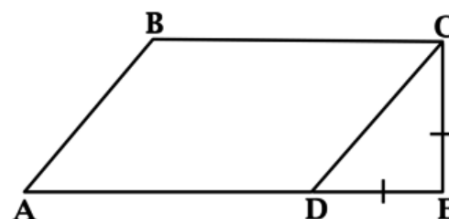
Практические задания

Задание 1

Из точки C параллелограмма $ABCD$ опустили перпендикуляр на продолжение стороны AD за точку D . Этот перпендикуляр пересёк прямую AD в точке E , причём $CE = DE$. Найдите $\angle B$ параллелограмма $ABCD$. Ответ дайте в градусах.

Решение:

1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, тогда $\angle EDC = \angle DCE$.
2. Так как $\angle DEC = 90^\circ$, а сумма углов треугольника равна 180° , то $\angle EDC = 45^\circ$, тогда $\angle ADC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.
3. Так как в параллелограмме противоположные углы равны, то $\angle B = \angle ADC = 135^\circ$.



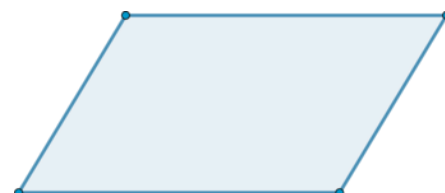
Ответ: 135

Задание 2

Один угол параллелограмма больше другого на 70° . Найдите больший угол. Ответ дайте в градусах.

Решение:

1. В параллелограмме противоположные углы равны, а прилежащие к одной стороне в сумме дают 180° .
2. Следовательно, пусть x – некоторый угол параллелограмма, тогда второй равен $x + 70^\circ$.
3. Так как они не могут быть противоположными, то они прилежащие к одной стороне, следовательно, $x + x + 70^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 55^\circ$.
4. Тогда больший угол параллелограмма равен $x + 70^\circ = 125^\circ$.



Ответ: 125

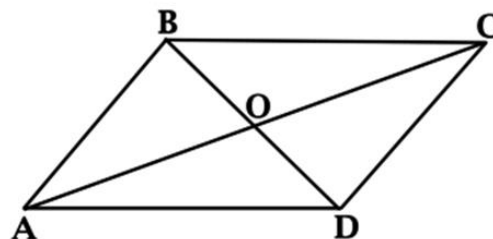


Задание 3

В параллелограмме $ABCD$ сумма длин диагоналей равна 10, а меньшая сторона параллелограмма $ABCD$ равна 2. Найдите наименьший из периметров треугольников, на которые диагонали делят параллелограмм $ABCD$.

Решение:

1. В параллелограмме диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Пусть точка пересечения диагоналей – точка O , тогда $AO + BO = 0,5(AC + BD) = 5 = AO + OD = OD + OC = OC + OB$.
2. Таким образом, периметр каждого из треугольников, на которые диагонали делят параллелограмм $ABCD$, равен полусумме диагоналей параллелограмма $ABCD$ плюс сторона параллелограмма, которая является стороной этого треугольника.
3. Тогда наименьшим будет периметр того из этих треугольников, стороной которого является одна из меньших сторон параллелограмма и равен он $5+2=7$.



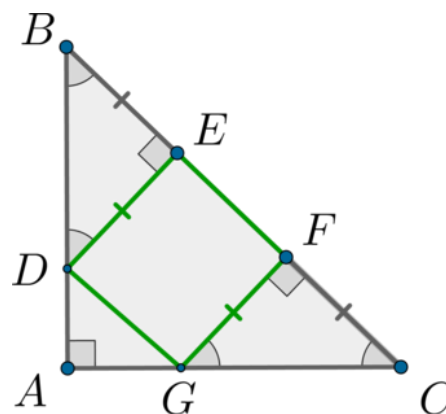
Ответ: 7

Задание 4

Две вершины квадрата расположены на гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника, а две другие – на катетах. Найдите сторону квадрата, если гипотенуза равна 9.

Решение:

1. Т.к. треугольник равнобедренный и прямоугольный, то его углы при гипотенузе равны по 45° .
2. Квадрат образует с гипотенузой углы $\angle GFC = 90^\circ$ и $\angle DEF = 90^\circ$, а значит, что треугольники DBE и GFC – равнобедренные прямоугольные, т.к. $\angle BDE = 45^\circ, \angle FGC = 45^\circ$.
3. Пусть сторона квадрата равна a , тогда длину гипотенузы можно выразить через сторону квадрата: $BC = 3 \cdot a = 9 \Rightarrow a = 3$.



Ответ: 3

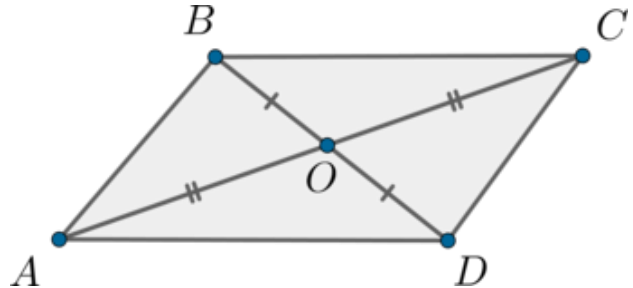


Задание 5

Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Периметр параллелограмма равен 12, а разность периметров треугольников BOC и COD равна 2. Найдите большую сторону параллелограмма.

Решение:

1. По свойству параллелограмма: диагонали точкой пересечения делятся пополам, т.е. $BO = DO, AO = CO$.
2. $P_{BOC} = BC + BO + CO, P_{COD} = CD + DO + CO \Rightarrow P_{BOC} - P_{COD} = BC - CD = 2$.
3. Пусть $BC = x$, тогда $CD = x - 2$, подставим эти выражения в формулу периметра: $BC + AD + CD + AB = x + x + (x - 2) + (x - 2) = 12 \Rightarrow x = 4$.



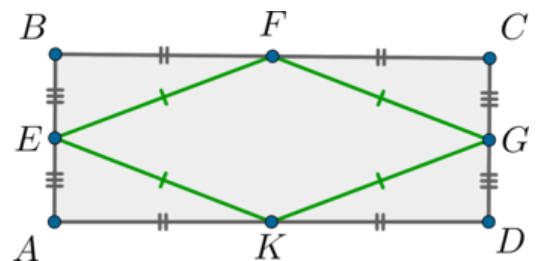
Ответ: 4

Задание 6*

Найдите периметр четырехугольника с вершинами в серединах сторон прямоугольника с диагональю, равной 8.

Решение:

1. Пусть $AB = a, BC = b$, в прямоугольнике все углы прямые, тогда по теореме Пифагора: $\sqrt{a^2 + b^2} = 8$.
2. Найдём сторону EF : т.к. E и F – середины сторон AB и BC , то $BF = \frac{b}{2}, EB = \frac{a}{2}$, тогда $EF = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}}$, аналогично находятся остальные стороны, которые равны.
3. Найдём периметр: $P_{EFGK} = 4 \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = 2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \cdot AC = 16$.



Ответ: 16

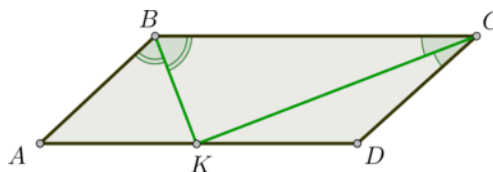


Задание 7

Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются на стороне AD . Найдите BC , если $AB = 4$.

Решение:

1. По свойству биссектрисы параллелограмма $\triangle ABK$ и $\triangle CDK$ – равнобедренные ($AB = AK, CD = DK$).
2. Следовательно, $BC = AD = AK + DK = AB + CD = 2AB = 8$.



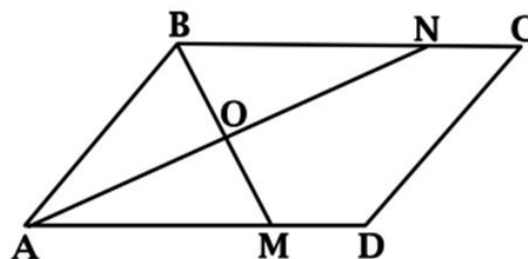
Ответ: 8

Задание 8

В параллелограмме $ABCD$ проведены биссектрисы AN и BM , $\angle ABM = 58^\circ$. Найдите $\angle BAN$. Ответ дайте в градусах.

Решение:

1. Сумма односторонних углов при параллельных прямых и секущей равна 180° , тогда $\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$.
2. Так как AN и BM – биссектрисы, то $\angle BAN + \angle ABM = 0,5(\angle DAB + \angle ABC) = 90^\circ$.
3. $\angle ABM = 58^\circ$, тогда $\angle BAN = 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ$.



Ответ: 32

Задание 9

В параллелограмме $ABCD$ биссектриса, выходящая из вершины B , пересекает AD в точке K и равна 6. $\angle BAD = 60^\circ$, $AK:KD = 3:2$. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$.

Решение:

1. $\angle ABK = \angle KBC$ т.к. BK – биссектриса $\angle ABC$.
2. $\angle KBC = \angle BKA$, т.к. это накрест лежащие углы при параллельных прямых.
3. Тогда: $\angle ABK = \angle BKA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAD) = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$ - $\triangle ABK$ равносторонний, значит $AB = BK = AK = 6$.
4. Тогда $AK:KD = 6:KD = 3:2 \Rightarrow KD = 4$.
5. $AD = AK + KD = 10$, тогда: $P_{ABCD} = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 10 = 32$.

Ответ: 32



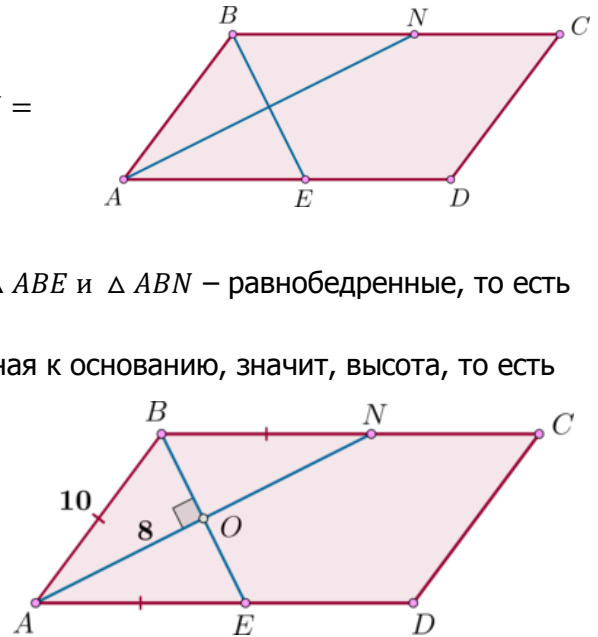
Задание 10

В параллелограмме $ABCD$ проведены биссектрисы AN и BE односторонних углов. Найдите BE , если $AN = 16, AB = 10$.

Решение:

1. По свойству биссектрисы параллелограмма $\triangle ABE$ и $\triangle ABN$ – равнобедренные, то есть $AE = AB = BN$.
2. Следовательно, AO – биссектриса, проведенная к основанию, значит, высота, то есть $\angle AOB = 90^\circ$, а также и медиана, то есть $BO = OE$. Аналогично $AO = ON = \frac{1}{2} AN = 8$.
3. Тогда по теореме Пифагора из $\triangle AOB$:
 $BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = 6 \Rightarrow BE = 2 \cdot 6 = 12$.

Ответ: 12



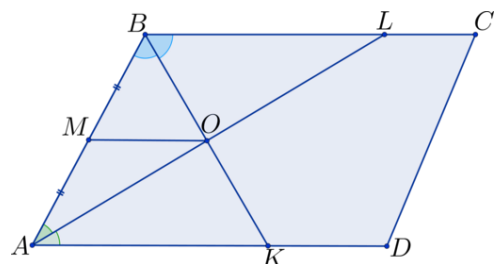
Задание 11*

В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы BK и AL пересекаются в точке O . Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если $AD=10$, а медиана OM в $\triangle AOB$ равна 4.

Решение:

1. $\angle AOB = 90^\circ \Rightarrow OM = \frac{1}{2} \cdot AB$, т.к. в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная из прямого угла, равна половине гипотенузы.
2. Тогда $AB = 2 \cdot 4 = 8 \Rightarrow P_{ABCD} = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 10 = 36$.

Ответ: 36



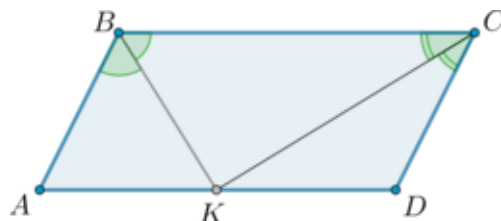


Задание 12

Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 5. Найдите его большую сторону.

Решение:

1. $AB = 5$. Так как в параллелограмме противоположные стороны параллельны, то $\angle AKB = \angle KBC$ как накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей BK .
2. Следовательно, $\angle AKB = \angle ABK$, то есть $\triangle ABK$ равнобедренный: $AK = AB$. Аналогично $DC = DK$.
3. Так как в параллелограмме противоположные стороны равны, то $AK = AB = 5 = CD = DK$. Следовательно, $AD = 5 + 5 = 10$ – большая сторона.



Ответ: 10

Задание 13*

Периметр прямоугольника ABCD относится к периметру треугольника ABC, как 7:6. Найдите периметр ABCD, если $BD=10$.

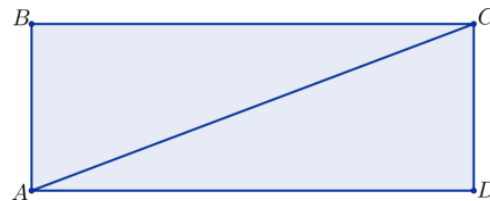
Решение:

$$P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC, \quad P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + BC) \Rightarrow 2 \cdot P_{\triangle ABC} - P_{ABCD} = 2 \cdot AC = 2 \cdot BD = 20.$$

$$\text{С другой стороны } 2 \cdot P_{\triangle ABC} - P_{ABCD} = 2 \cdot 6 \cdot x - 7 \cdot x = 5 \cdot x \Rightarrow 5 \cdot x = 20 \Rightarrow x = 4,$$

$$\text{откуда находим } P_{ABCD} = 7 \cdot x = 28.$$

Ответ: 28



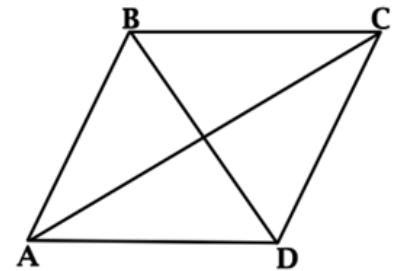


Задание 14

Найдите большую диагональ ромба $ABCD$, если $AB = 23$, а острый угол равен половине тупого.

Решение:

1. Так как сумма односторонних углов при параллельных прямых и секущей равна 180° , то сумма острого и тупого углов ромба равна 180° .
2. Так как в данном ромбе острый угол равен половине тупого, то острый угол ромба $ABCD$ равен 60° .
3. Треугольник ABD – равнобедренный, один из углов которого равен 60° , тогда треугольник ABD – равносторонний и $BD = 2\sqrt{3}$.
4. Пусть O – точка пересечения диагоналей ромба, тогда $OD = 0,5BD = \sqrt{3}$, следовательно, по теореме Пифагора находим: $AO^2 + OD^2 = AD^2$, тогда $AO^2 + 3 = 12$, откуда находим $AO = 3$.
5. В ромбе, как и в любом другом параллелограмме, диагонали точкой пересечения делятся пополам, значит, $AC = 6$.



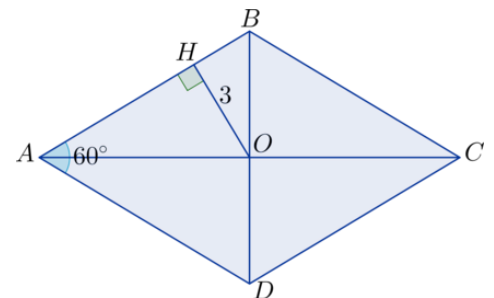
Ответ: 6

Задание 15

Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 3, а острый угол ромба равен 60° . Найдите большую диагональ ромба.

Решение:

1. Пусть в ромбе $ABCD$: O – точка пересечения диагоналей, OH – расстояние до стороны AB , $\angle DAB = 60^\circ$, тогда $\angle OAB = 30^\circ$.
2. Получаем, что OH – катет лежащий напротив угла в 30° , значит $AO = 2 \cdot OH = 6$.
3. Т.к. AC и есть большая диагональ, то $AC = 2 \cdot AO = 12$.



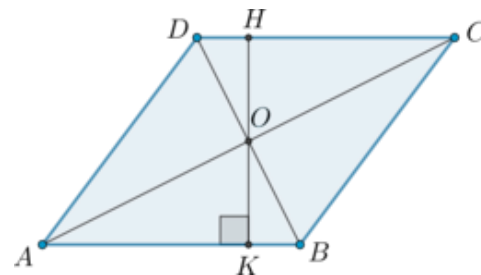
Ответ: 12



Задание 16

Диагонали ромба относятся как 4:3. Периметр ромба равен 200. Найдите высоту ромба.

Решение: Отрезок HK – высота ромба. Так как $AB \parallel DC$ и $HK \perp AB$, то $HK \perp DC$.



1 способ

1. Так как диагонали ромба делят его на 4 равных прямоугольных треугольника, а у равных треугольников высоты, опущенные к равным сторонам, равны, то $OK = OH$.
2. Рассмотрим $\triangle AOB$. Так как $AC:BD = 4:3$, то также $AO:BO = 4:3$.
3. Пусть $AO = 4x, BO = 3x$. Следовательно, $AB = \sqrt{(4x)^2 + (3x)^2} = 5x$.
4. Так как у ромба все стороны равны, то его сторона равна $200:4 = 50$, следовательно, $5x = 50$ и $x = 10$.
5. Высота прямоугольного треугольника AOB , опущенная из вершины прямого угла O , равна $\frac{AO \cdot OB}{AB}$, следовательно, $OK = \frac{4x \cdot 3x}{5x} = \frac{12}{5}x = 24 \Rightarrow HK = 24 \cdot 2 = 48$

2 способ

1. Так как у ромба все стороны равны, то его сторона равна $AB = 200:4 = 50$. Следовательно, площадь ромба равна $S = 50HK$ (произведение стороны на высоту, проведенную к этой стороне).
2. Так как $AC:BD = 4:3$, то можно принять $AC = 4a, BD = 3a$.
3. Так как площадь ромба равна полупроизведению диагоналей, то $S = 0,5 \cdot 4a \cdot 3a = 6a^2$, следовательно, $50HK = 6a^2 \Rightarrow HK = \frac{3}{25}a^2$
4. Так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам, то по теореме Пифагора из $\triangle AOB$: $(\frac{3}{2}a)^2 + (2a)^2 = AB^2 \Rightarrow a^2 = 400$
5. Следовательно, $HK = \frac{3}{25} \cdot 400 = 48$

Ответ: 48



Задание 17*

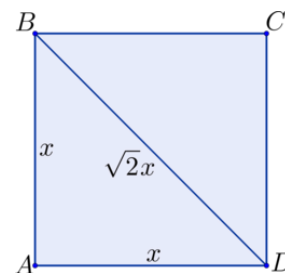
Периметр $\triangle ABD$ равен $16 + 8\sqrt{2}$. Найдите периметр квадрата $ABCD$.

Решение:

Если сторону квадрата обозначить за x , то диагональ квадрата будет равна $\sqrt{2}x$, тогда $P_{\triangle ABD} = x + x + \sqrt{2}x = x \cdot (2 + \sqrt{2}) = 16 + 8\sqrt{2} = 8 \cdot (2 + \sqrt{2}) \Rightarrow$

$$x = 8 \Rightarrow P_{ABCD} = 4 \cdot x = 4 \cdot 8 = 32.$$

Ответ: 32



Задание 18

В трапеции $ABCD$: $CD = BC$, $\angle BCD = 140^\circ$, $\angle ABD = 100^\circ$. Найдите модуль разности острых углов трапеции.

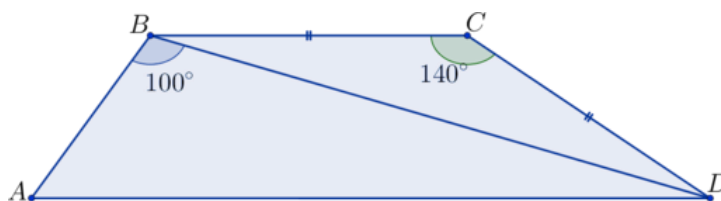
Решение: $\triangle BCD$ – равнобедренный $\Rightarrow$
 $\angle CBD = \angle CDB = 20^\circ$;

$$\angle BAD = 180^\circ - \angle ABD - \angle CBD = 180^\circ - 100^\circ - 20^\circ = 60^\circ;$$

$$\angle ADC = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ.$$

$$\text{Тогда } |\angle ADC - \angle BAD| = |40^\circ - 60^\circ| = |-20^\circ| = 20^\circ.$$

Ответ: 20



Задание 19

Большее основание равнобедренной трапеции равно 25. Боковая сторона равна 3. Синус острого угла равен $\frac{\sqrt{11}}{6}$. Найдите меньшее основание.

Решение:

1. Проведем две высоты CK и DH .
2. По свойству равнобедренной трапеции $HDCK$ – прямоугольник, то есть $KH = CD = x$. Тогда $AH + BC = 25 - x$, откуда $AH = \frac{25-x}{2}$

3. Так как $\sin \angle A = \frac{\sqrt{11}}{6}$, то $\cos \angle A = \sqrt{1 - \frac{11}{36}} = \frac{5}{6}$

4. Следовательно, из $\triangle ADH$: $\frac{5}{6} = \cos \angle A = \frac{AH}{AD} \Rightarrow x = 20$

Ответ: 20

