



«Решение задач по планиметрии»

Вычисление синуса, косинуса и тангенса угла треугольника

В прямоугольном треугольнике:

- Синус острого угла равен отношению противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

- Косинус острого угла равен отношению прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

- Тангенс острого угла равен отношению противолежащего катета к прилежащему:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

- Котангенс острого угла равен отношению прилежащего катета к противолежащему:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

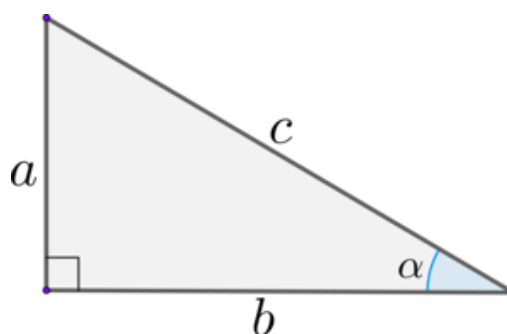
Важные формулы:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$



	α							
Градусы:	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Радианы:	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

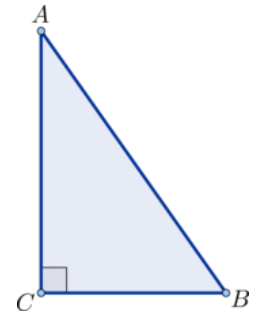


Задание 1

Дан прямоугольный треугольник ABC, причем $\angle C = 90^\circ$. Известно, что $\cos \angle B = \frac{1}{3}$, $AB = 9$. Найдите BC.

Решение: По определению косинуса $\cos \angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow BC = \frac{1}{3} \cdot AB = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$

Ответ: 3



Задание 2

Большее основание равнобедренной трапеции равно 34. Боковая сторона равна 14. Синус острого угла равен $\frac{2\sqrt{10}}{7}$. Найдите меньшее основание.

Решение:

1. Проведем $BH \perp AD$.

2.

3. Из $\triangle ABH$: $\frac{(2\sqrt{10})}{7} = \sin \angle A = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = 4\sqrt{10}$

4. Тогда по теореме Пифагора $AH = \sqrt{14^2 - (4\sqrt{10})^2} = 6$

5. Так как $AH = 0,5(AD - BC)$, то $BC = AD - 2AH = 34 - 12 = 22$.



Ответ: 22

Задание 3

В треугольнике ABC угол $C = 90^\circ$, CH – высота, $AB = 26$, $\tan \angle B = 5$. Найдите AH.

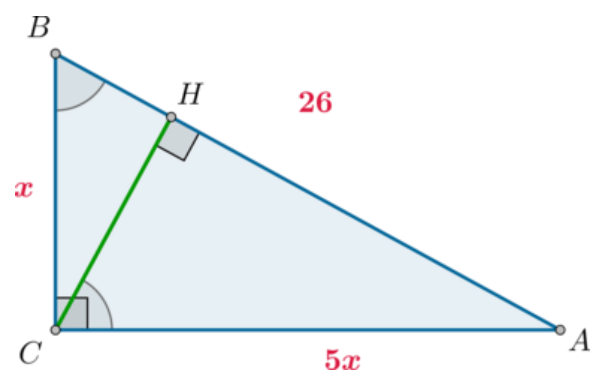
Решение:

1. По определению из $\triangle ABC$: $\frac{AC}{BC} = \tan \angle B = 5$

2. Следовательно, можно принять $AC = 5x$, $BC = x$. Тогда по теореме Пифагора $x^2 + (5x)^2 = 26^2$, откуда $x = \sqrt{26}$.

3. Тогда $\sin \angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{\sqrt{26}}$ свойству прямоугольного треугольника $\angle B = \angle HCA$.

4. Следовательно, из $\triangle HCA$: $\frac{5}{\sqrt{26}} = \sin \angle HCA = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = 25$



Ответ: 25

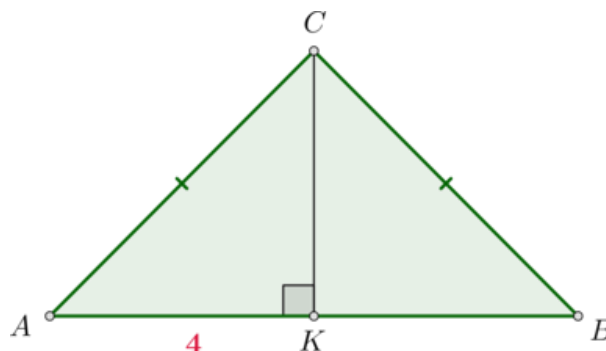


Задание 4

В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$, $AB = 8$, $\operatorname{tg} \angle A = \frac{\sqrt{33}}{4}$. Найдите AC .

Решение:

1. Проведем $CK \perp AB$.
2. Так как треугольник ABC равнобедренный, то CK также является медианой, следовательно, $AK = 0,5AB = 4$.
3. Тогда $\frac{CK}{AK} = \operatorname{tg} \angle A = \frac{\sqrt{33}}{4} \Rightarrow CK = \sqrt{33}$
4. Тогда по теореме Пифагора из $\triangle ACK$: $AC = \sqrt{AK^2 + CK^2} = \sqrt{16 + 33} = 7$



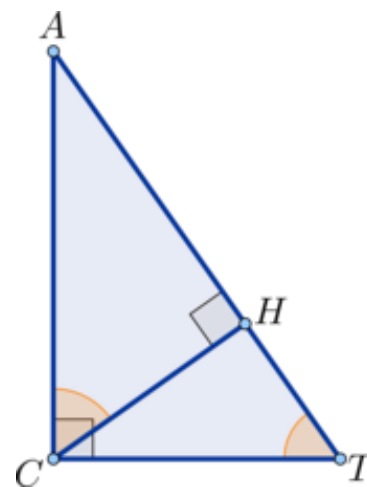
Ответ: 7

Задание 5

Дан прямоугольный треугольник CAT , причем $\angle C = 90^\circ$, а CH – высота этого треугольника. Известно, что $\sin \angle ACH = \frac{2}{5}$, $AT = 8$. Найдите AH .

Решение:

1. По определению синуса $\sin \angle ACH = \frac{AH}{AC}$. Для того, чтобы найти AH , необходимо найти AC .
2. Т.к. высота прямоугольного треугольника CAT , опущенная из вершины прямого угла, делит его на два треугольника, каждый из которых подобен $\triangle CAT$, то $\angle ACH = \angle ATC$.
3. Значит, и $\sin \angle ACH = \sin \angle ATC = \frac{2}{5}$.
4. Но по определению $\sin \angle ATC = \frac{AC}{AT} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{AC}{8} \Leftrightarrow AC = \frac{16}{5}$
5. Значит, $\frac{2}{5} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC \cdot \frac{2}{5} = \frac{32}{25} = 1,28$.



Ответ: 1,28

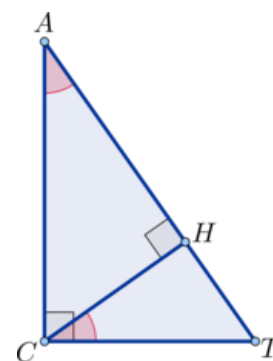
Задание 6*

В прямоугольном треугольнике CAT из вершины C прямого угла опущена высота CH . Известно, что $TH = 12$, $CH = 5$. Найдите $\sin \angle A$.

Решение:

По свойству прямоугольного треугольника и высоты, опущенной из его прямого угла, $\triangle CHT \sim \triangle CAT$. Значит, $\angle HCT = \angle A$.

Поэтому будем искать $\sin \angle HCT$.





Из треугольника HCT : $\sin \angle HCT = \frac{TH}{TC}$

По теореме Пифагора из этого же треугольника мы можем найти TC : $TC = \sqrt{TH^2 + CH^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$

Следовательно, $\sin \angle A = \sin \angle HCT = \frac{12}{13} \Rightarrow 13 \sin \angle A = 12$.

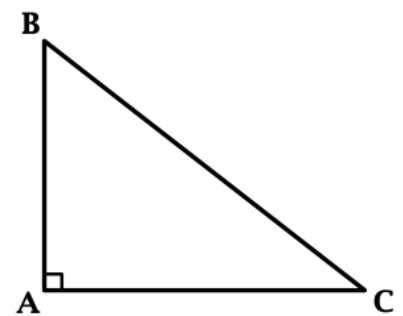
Ответ: 12

Задание 7*

В треугольнике ABC : $\angle A = 90^\circ$, $\operatorname{ctg} \angle B = 0,6$. Площадь треугольника ABC равна 7,5. Найдите $AB + AC$.

Решение:

1. $0,6 = \operatorname{ctg} \angle B = \frac{AB}{AC}$.
2. Площадь треугольника ABC равна 7,5, тогда $7,5 = 0,5 \cdot AB \cdot AC$.
3. Таким образом, $\frac{AB}{AC} = 0,6$, $AB \cdot AC = 15$.
4. Перемножая равенства, получим $AB^2 = 9$, тогда $AB = 3$, $AC = 5$, значит, $AB + AC = 8$.



Ответ: 8