



«Решение задач по планиметрии»

Треугольник: задачи на подобие

► Треугольники подобны, если их углы равны, а сходственные стороны (лежащие напротив равных углов) относятся друг к другу с одним и тем же коэффициентом k (пропорциональны).

► Признаки подобия:

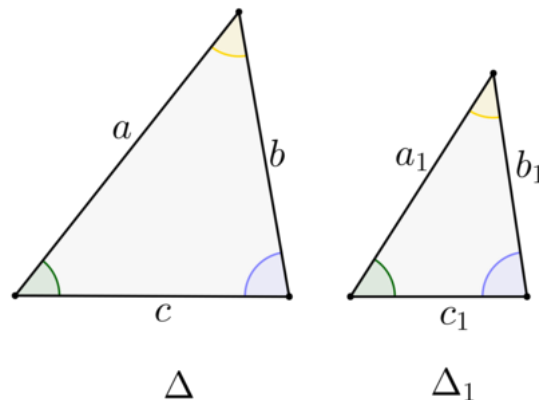
1. Два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника.
2. Три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника.
3. Две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого, а углы между этими сторонами равны.

► Площади подобных треугольников относятся как k^2 , а периметры – как k .

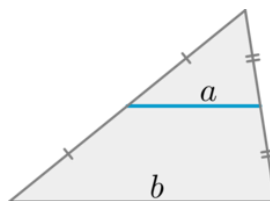
$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k$$

$$\frac{P_{\Delta}}{P_{\Delta_1}} = k$$

$$\frac{S_{\Delta}}{S_{\Delta_1}} = k^2$$



► Средняя линия треугольника – отрезок, соединяющий середины двух сторон. Она равна половине третьей стороны.



$$a = \frac{1}{2} b$$

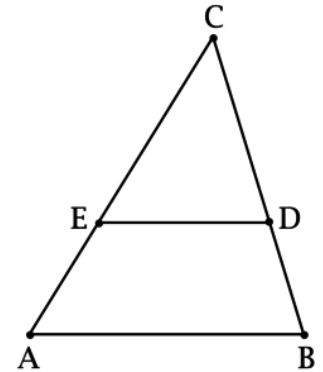


Задание 1

Точка E лежит на стороне AC треугольника ABC , причём $EC:AE = 2:1$. Точка D лежит на BC , причём $ED \parallel AB$. Найдите AB , если $ED = \frac{4}{3}$.

Решение:

1. Так как $ED \parallel AB$, то $\angle CED = \angle CAB$, $\angle CDE = \angle CBA$ (как соответственные при параллельных прямых и секущей), тогда треугольники CED и CAB подобны.
2. Так как $EC = 2 \cdot AE$, то $AC = 3 \cdot AE$, следовательно, $\frac{AC}{EC} = \frac{3 \cdot AE}{2 \cdot AE} = \frac{3}{2}$.
3. Так как стороны EC и AC лежат против равных углов (в треугольниках CED и CAB соответственно), то $\frac{AB}{ED} = \frac{AC}{EC} = \frac{3}{2}$, откуда $AB = \frac{3}{2} \cdot ED = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2$.



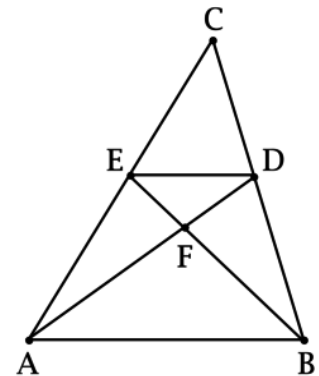
Ответ: 2

Задание 2

F – точка пересечения AD и BE – медиан треугольника ABC . Известно, что $S_{ABF} = 1$. Найдите S_{DEF} .

Решение:

1. ED – средняя линия треугольника ABC , тогда $ED = 0,5 \cdot AB$, $ED \parallel AB$.
2. Так как $ED \parallel AB$, то $\angle DEF = \angle ABF$, $\angle EDF = \angle FAB$ (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых и секущей), следовательно, треугольники DEF и ABF подобны (по двум углам).
3. Так как $ED = 0,5 \cdot AB$, причём стороны ED и AB лежат (в треугольниках DEF и ABF соответственно) против равных углов, то $\frac{S_{DEF}}{S_{ABF}} = \left(\frac{ED}{AB}\right)^2 = 0,5^2 = 0,25$, откуда с учётом того, что $S_{ABF} = 1$ находим $S_{DEF} = 0,25$.

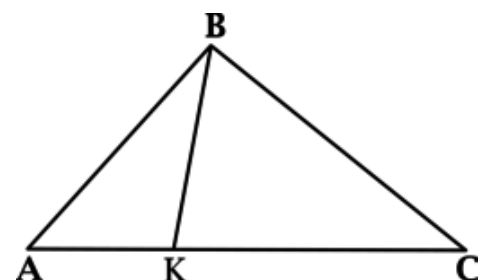


Ответ: 0,25

Задание 3*

Отрезок BK соединяет вершину B треугольника ABC с точкой на противоположной стороне, причём $\angle AKB = \angle B$. При этом известно, что $BK = 10$, $AB = 12$, $AC = 18$. Найдите BC .

Решение:





1. Рассмотрим треугольники ABK и ACB : $\angle K = \angle B$, $\angle A$ – общий, тогда треугольники ABK и ACB подобны по двум углам.
2. В подобных треугольниках против равных углов лежат пропорциональные стороны, тогда $\frac{BK}{BC} = \frac{AB}{AC}$, откуда $\frac{10}{BC} = \frac{12}{18}$, следовательно $BC = 15$.

Ответ: 15

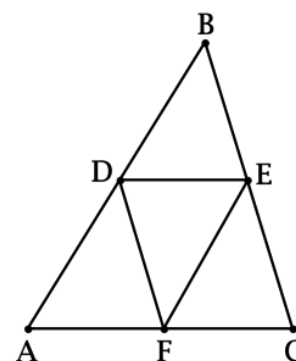
Задание 4*

На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC лежат точки D , E и F соответственно. Известно, что $\frac{DF}{BC} = 0,5$, $AC = 2 \cdot DE$, $AB - EF = EF$, $\angle DEF = 61^\circ$, $\angle EFD = 55^\circ$. Найдите $\angle C$. Ответ дайте в градусах.

Решение:

1. Так как $\angle DEF = 61^\circ$, $\angle EFD = 55^\circ$, то $\angle EDF = 180^\circ - 61^\circ - 55^\circ = 64^\circ$.
2. Рассмотрим треугольники ABC и EFD : по условию $\frac{DF}{BC} = 0,5 = \frac{DE}{AC} = \frac{EF}{AB}$, тогда треугольники ABC и EFD подобны по пропорциональности трех сторон.
3. В подобных треугольниках против пропорциональных сторон лежат равные углы, тогда $\angle C = \angle EDF = 64^\circ$.

Ответ: 64



Задание 5*

В четырехугольнике $ABCD$ $BC = 5$, $AD = 20$, $\angle B = \angle ACD$, $\angle D = \angle BAC$. Найдите AC .

Решение:

1. Треугольники ABC и ACD подобны по двум углам ($\angle B = \angle ACD$, $\angle D = \angle BAC$).
2. Так как в подобных треугольниках против равных углов лежат пропорциональные стороны, то $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AD}$.
3. Обозначим $AC = x$, тогда имеем $\frac{5}{x} = \frac{x}{20}$, откуда $x^2 = 100$, следовательно, $x = \pm 10$, но $x > 0$, тогда $x = 10$.

Ответ: 10

