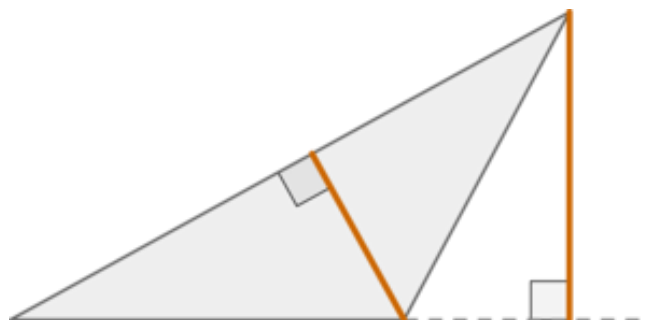




«Решение задач по планиметрии»

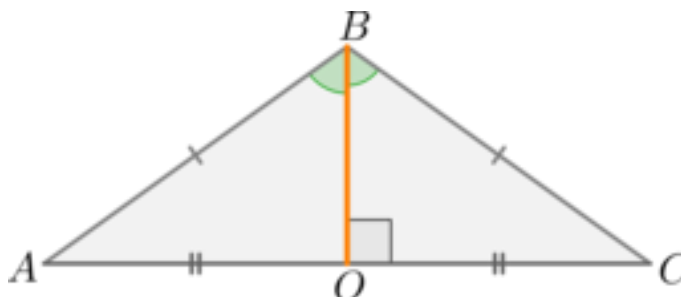
Нахождение высоты, биссектрисы и медианы треугольника

► Высота треугольника может упасть как на сторону, так и на ее продолжение. Второй случай возможен только если треугольник тупоугольный и высота проведена из вершины острого угла.



► Все медианы треугольника пересекаются в одной точке. Все высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке. Все биссектрисы пересекаются в одной точке.

► В равнобедренном треугольнике биссектриса, высота и медиана, проведенные к основанию, совпадают (отрезок BO). Обратно: если в треугольнике совпадают биссектриса и медиана (биссектриса и высота, высота и медиана), проведенные к одной стороне, то этот треугольник равнобедренный.

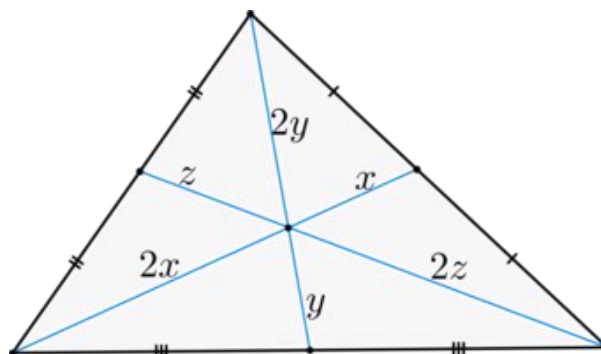


► В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы. Обратно: если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то она проведена из вершины прямого угла.

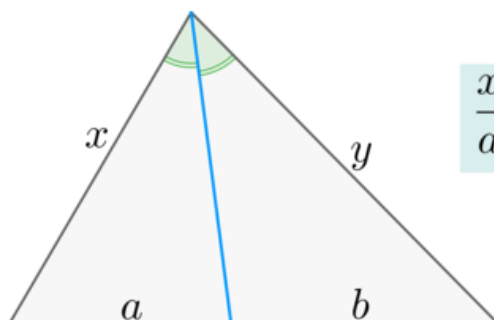




- Медианы треугольника своей точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины.

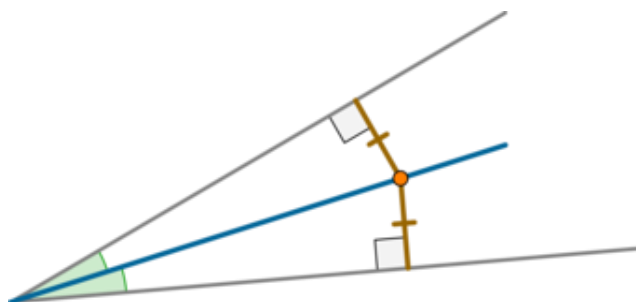


- Биссектриса треугольника делит сторону, к которой она проведена, на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Обратное: если отрезок, проведенный из вершины треугольника к стороне, делит эту сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, то это биссектриса.



$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

- Если точка равноудалена от сторон угла, то она лежит на его биссектрисе. Обратное: каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон.





Задание 1

В треугольнике ABC : $\angle B = 90^\circ$, BE – медиана, $\angle CBE = 22^\circ$. Найдите $\angle BAC$. Ответ дайте в градусах.

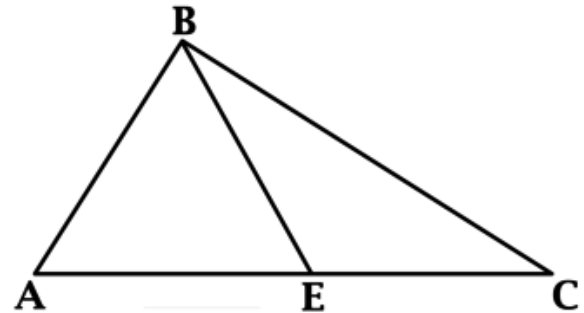
Решение:

В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы, тогда $AE = BE$, значит треугольник AEB – равнобедренный.

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, тогда $\angle A = \angle ABE$.

Так как $\angle B = 90^\circ$, $\angle CBE = 22^\circ$ то $\angle ABE = 90^\circ - 22^\circ = 68^\circ$, откуда $\angle BAC = 68^\circ$.

Ответ: 68



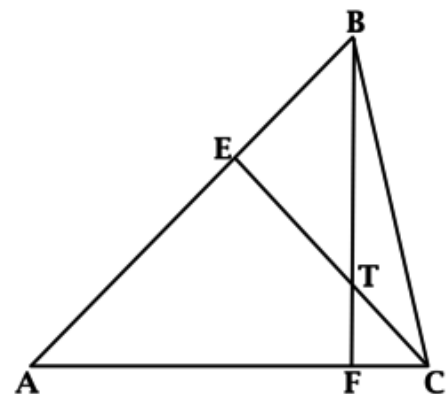
Задание 2

В треугольнике ABC : CE и BF – высоты, пересекающиеся в точке T , $\angle CTB = 152^\circ$. Найдите $\angle A$. Ответ дайте в градусах.

Решение:

1. Так как $\angle TFC = 90^\circ$, то $\angle FTC = 180^\circ - \angle CTB = 28^\circ$, тогда $\angle TCF = 90^\circ - \angle FTC = 62^\circ$.
2. Треугольник AEC – прямоугольный. $\angle A = 90^\circ - \angle TCF = 28^\circ$.

Ответ: 28



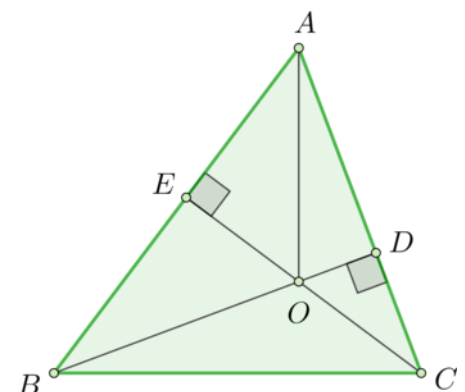
Задание 3

В треугольнике ABC угол A равен 56° , углы B и C – острые. Высоты BD и CE пересекаются в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах.

Решение:

1 способ

1. Проведем OA .
2. Тогда $\angle DOE = \angle DOA + \angle EOA$.
3. Так как $\angle AEO = \angle ADO = 90^\circ$, то из прямоугольных треугольников $\triangle AEO$ и $\triangle ADO$ $\angle EOA = 90^\circ - \angle OAE$, $\angle DOA = 90^\circ - \angle OAD$.



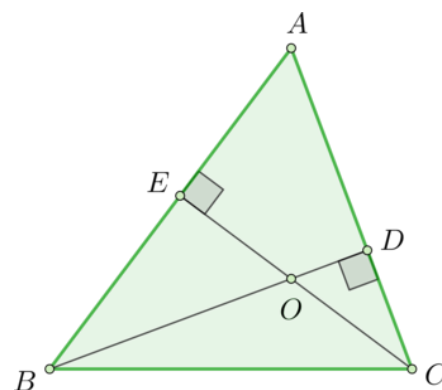


4. Следовательно: $\angle DOE = \angle DOA + \angle EOA = 90^\circ - \angle OAD + 90^\circ - \angle OAE = 180^\circ - (\angle OAD + \angle OAE) = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 56^\circ = 124^\circ$

2 способ

1. Вспомним, что сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360° .
2. Тогда для четырехугольника $AEOD$: $\angle A + \angle E + \angle O + \angle D = 360^\circ$, откуда $\angle DOE = \angle O = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 56^\circ = 124^\circ$

Ответ: 124



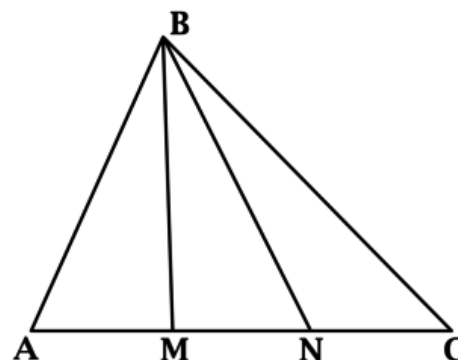
Задание 4

В треугольнике ABC на стороне AC отмечены точки M и N так, что M – середина AN , а BN – медиана в треугольнике BMC . Во сколько раз AC длиннее, чем MN ?

Решение:

1. $AM = MN, MN = NC$, тогда $AC = AM + MN + NC = 3 \cdot MN$.
2. $AC : MN = 3$.

Ответ: 3



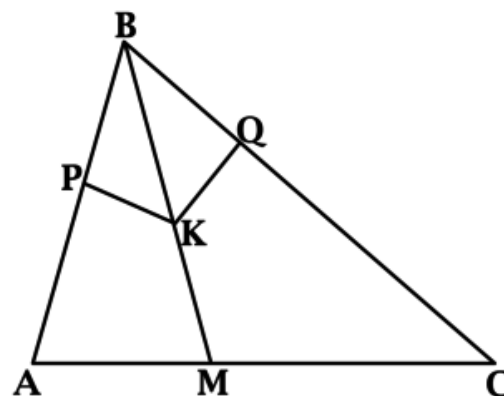
Задание 5*

В треугольнике ABC : BM – биссектриса, на сторонах AB и BC выбраны точки P и Q соответственно, причём перпендикуляр к AB , проходящий через точку P и перпендикуляр к BC , проходящий через точку Q , пересеклись в точке K , лежащей на биссектрисе BM . Найдите PK , если известно, что $KQ = 33$.

Решение:

1. Так как каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон, то $PK = KQ = 33$.
2. Покажем это подробнее: треугольники PKB и BKQ – прямоугольные, имеющие общую гипотенузу и $\angle PBK = \angle KBQ$, тогда треугольники PKB и BKQ равны по гипотенузе и острому углу, значит, $PK = KQ$.

Ответ: 33



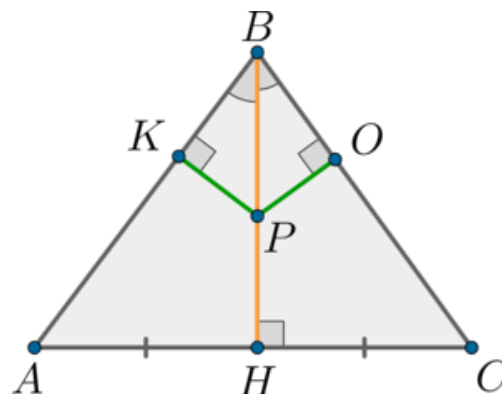


Задание 6*

Найдите основание равнобедренного треугольника, если угол при основании равен 30° , а взятая внутри треугольника точка находится на одинаковом расстоянии, равном 3, от боковых сторон и на расстоянии 23 от основания.

Решение:

1. Точка P находится на равном расстоянии от обеих сторон треугольника, следовательно, лежит на биссектрисе BH , т.к. $AB = BC$, то BH также является медианой и высотой.
2. $\angle ABH = 60^\circ$, а $\angle BPK = 30^\circ$, тогда $BP = 23$, $BH = 43$.
3. Теперь найдем AH по теореме Пифагора: $AH = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 - (4\sqrt{3})^2} = 12 \Rightarrow AC = 12 \cdot 2 = 24$.



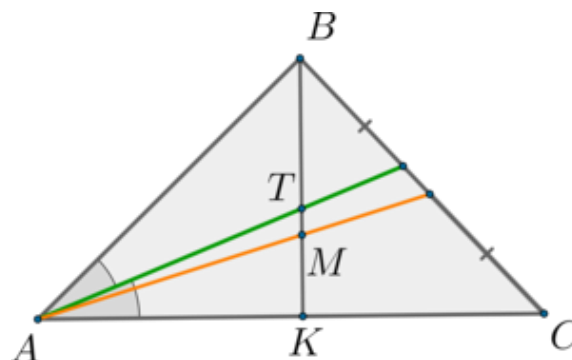
Ответ: 24

Задание 7*

В равнобедренном треугольнике ABC , в котором $AB = BC = 30$, $AC = 48$, найти расстояние между точкой пересечения медиан и точкой пересечения биссектрис.

Решение:

1. Т.к. треугольник ABC равнобедренный, то BK - медиана, высота и биссектриса.
2. Тогда по теореме Пифагора: $BK = \sqrt{BC^2 - KC^2} = 18$.
3. По свойству медиан точка M делит медианы в отношении 2:1, считая от вершины, тогда $BM = 12$, $МК = 6$.
4. По свойству биссектрис AT делит отрезок BM на части, пропорциональные прилежащим сторонам, то есть: $\frac{TK}{AK} = \frac{TB}{AB} \Rightarrow \frac{TK}{24} = \frac{18-TK}{30} \Rightarrow TK = 8$.
5. $TM = TK - KM = 8 - 6 = 2$.



Ответ: 2