



Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции с помощью производной

Поиск точек экстремума у элементарных функций

Простейшие элементарные функции и их производные:

	Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$		Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$
1	c	0	9	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
2	x^a	$a \cdot x^{a-1}$	10	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
3	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	11	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4	$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	12	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5	e^x	e^x	13	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
6	a^x	$a^x \cdot \ln a$	14	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
7	$\sin x$	$\cos x$			
8	$\cos x$	$-\sin x$			

Элементарные функции — любые линейные комбинации простейших элементарных функций (то есть их сумма, разность, умножение на число).

Пример: $f(x) = 4\cos x + \frac{x^3}{2}$

Основные формулы поиска производной ($f = f(x)$, $g = g(x)$ – функции):

1. Умножение функции на число: $(c \cdot f)' = c \cdot f'$
2. Сумма или разность двух функций: $(f \pm g)' = f' \pm g'$

Хитрости, упрощающие поиск производной:

- Т.к. $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, то производную этой функции можно искать по формуле (2).

Частный случай: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

- Т.к. $\frac{1}{x^a} = x^{-a}$, то производную этой функции можно также искать по формуле (2):
 $(\frac{1}{x^a})' = -\frac{a}{x^{a+1}}$

Для того, чтобы найти точки экстремума, необходимо схематично изобразить график функции.



В задачах из данной подтемы это можно сделать с помощью производной: найти промежутки возрастания ($f' > 0$) и убывания ($f' < 0$) функции, критические точки (где $f' = 0$ или f' не существует).

Практика

Задание 1

Найдите точку локального минимума функции $y = x^3 - 3x$.

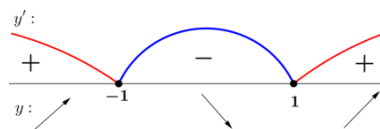
Решение:

ОДЗ: $x \in (-\infty; +\infty)$.

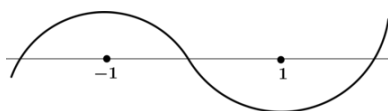
1) $y' = 3x^2 - 3$

Найдём критические точки (то есть внутренние точки области определения функции, в которых её производная равна 0 или не существует): $3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Производная существует при любом x .

2) Найдём промежутки знакопостоянства y' :



3) Эскиз графика y :



Таким
функции y .

образом, $x = 1$ – точка локального минимума

Ответ: 1

Задание 2

Найдите точку локального минимума функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + 2$.

Решение:

ОДЗ: $x \in (-\infty; +\infty)$.

1) $y' = x^2 - 6x + 8$.

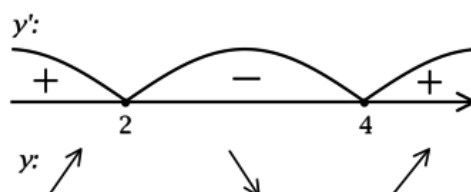
Найдём критические точки (то есть внутренние точки области определения функции, в которых её производная равна 0 или не существует):

$$x^2 - 6x + 8 = 0, \text{ откуда находим корни } x_1 = 2, x_2 = 4.$$

$$\text{Таким образом, } y' = (x - 2)(x - 4).$$

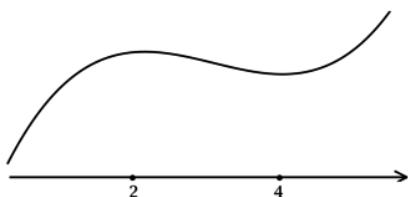
Для того, чтобы найти точки локального максимума/минимума функции, нужно понять, как схематично выглядит её график.

2) Найдём промежутки знакопостоянства y' :





3) Эскиз графика y :



Таким образом, $x = 4$ – точка локального минимума функции y .

Ответ: 4

Задание 3

Найдите точку локального минимума функции $y = x^{1,25} - 5x + 12$.

Решение:

ОДЗ: $x \geq 0$.

Решим на ОДЗ:

$$1) \ y' = 1,25x^{0,25} - 5.$$

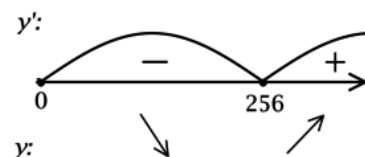
Найдём критические точки (то есть внутренние точки области определения функции, в которых её производная равна 0 или не существует):

$$1,25x^{0,25} - 5 = 0 \Leftrightarrow 1,25x^{0,25} = 5.$$

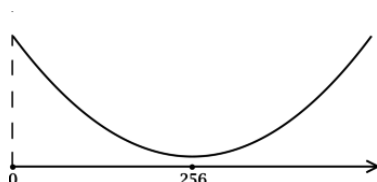
Возводя последнее уравнение в 4 степень, находим $x = 256$. Проверкой убеждаемся, что $x = 256$ – корень уравнения $1,25x^{0,25} - 5 = 0$.

Для того, чтобы найти точки локального максимума/минимума функции, нужно понять, как схематично выглядит её график.

2) Найдём промежутки знакопостоянства y' :



3) Эскиз графика y :



Таким образом, $x = 256$ – точка локального минимума функции y .

Ответ: 256

Задание 4*



Найдите точку минимума функции $y = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 1$.

Решение:

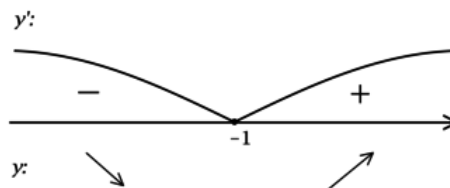
$$1) \ y' = 4x^3 + 12x^2 + 12x + 4 = 4(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = 4(x + 1)^3.$$

Найдём критические точки (то есть внутренние точки области определения функции, в которых её производная равна 0 или не существует):

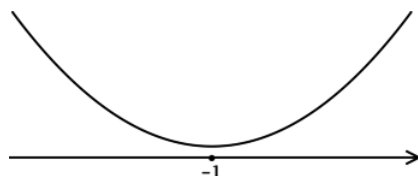
$$4(x + 1)^3 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^3 = 0, \text{ откуда находим } x = -1.$$

Для того, чтобы найти точки локального максимума/минимума функции, нужно понять, как схематично выглядит её график.

2) Найдём промежутки знакопостоянства y' :



Эскиз графика y :



Таким образом, $x = -1$ – точка минимума функции y .

Ответ: -1

Задание 5

Найдите точку минимума функции $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ на отрезке $[-15; 15]$.

Решение:

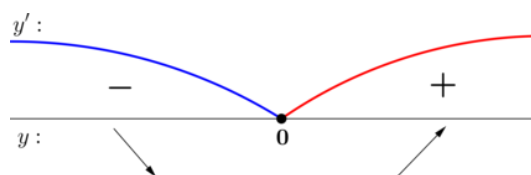
ОДЗ: x – произвольный.

$$1. \ y' = \frac{2x \cdot (x^2 + 1) - 2x \cdot (x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

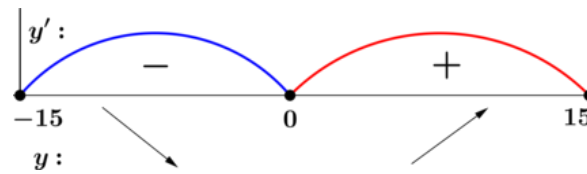
Найдём критические точки (то есть внутренние точки области определения функции, в которых её производная равна 0 или не существует):

$$\frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0. \text{ Производная существует при любом } x.$$

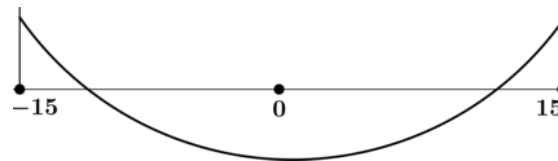
2. Найдём промежутки знакопостоянства y' :



3. Найдём промежутки знакопостоянства y' на рассматриваемом отрезке $[-15; 15]$:



4. Эскиз графика на отрезке $[-15;15]$:



Таким образом, $x=0$ – точка минимума функции y на отрезке $[-15;15]$.

Ответ: 0

Задание 6

Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 - 12x + 40}$.

Решение:

ОДЗ: $x^2 - 12x + 40 \geq 0$.

Решим на ОДЗ:

$$1) \ y' = \frac{2x-12}{2\sqrt{x^2-12x+40}} = \frac{x-6}{\sqrt{x^2-12x+40}}.$$

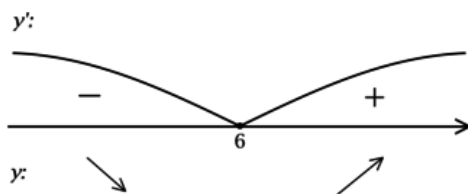
Найдём критические точки (то есть внутренние точки области определения функции, в которых её производная равна 0 или не существует):

$$\frac{(x-6)}{\sqrt{(x^2-12x+40)}} = 0 \Leftrightarrow x - 6 = 0 \text{ — на ОДЗ, откуда находим } x = 6.$$

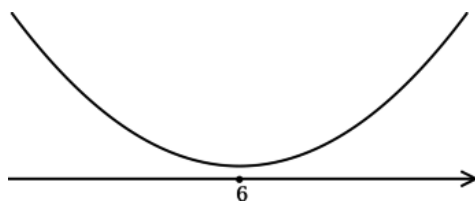
Так как $x^2 - 12x + 40 = x^2 - 12x + 36 + 4 = (x - 6)^2 + 4 > 0$, то производная функции y определена при любом x .

Для того, чтобы найти точки локального максимума/минимума функции, нужно понять, как схематично выглядит её график.

2) Найдём промежутки знакопостоянства y' :



3) Эскиз графика y :



Таким образом, $x=6$ – точка минимума функции y .

Ответ: 6