



Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции с помощью производной

Связь производной с точками экстремума функции

В данных задачах речь идет о непрерывных функциях (простым языком, функция будет непрерывна на интервале, если ее график можно нарисовать на этом интервале, не отрывая ручку от листа).

Точки (локального) экстремума функции – это точки (локального) максимума и минимума.

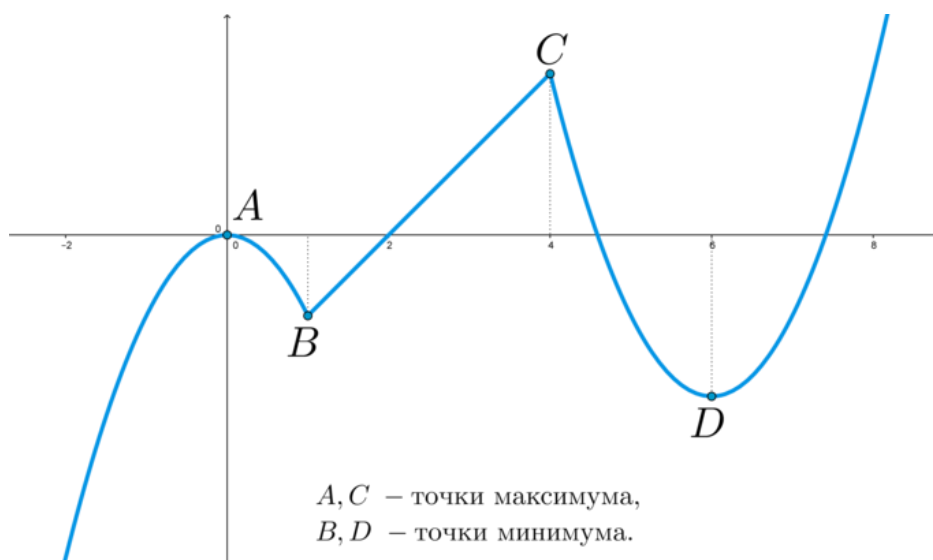
Окрестность – это интервал вокруг точки некоторого радиуса. Например, окрестностью точки $x = 0$ можно назвать интервал $(-1; 1)$, или $(-0,1; 0,1)$, или $(-0,0000001; 0,0000001)$ и т.д.

Точка максимума x_{max} – такая внутренняя точка области определения функции, для которой выполнено: $f(x) \leq f(x_{max})$ для любого x из некоторой окрестности точки x_{max} .

То есть можно найти такую окрестность, что для любой точки из этой окрестности будет выполнено данное неравенство. Заметим, что, например, если функция определена на отрезке $[0; 2]$, то все точки интервала $(0; 2)$ будут внутренними, а вот точки 0 и 2 – граничными (то есть не внутренними).

Точка минимума x_{min} – такая внутренняя точка области определения функции, для которой выполнено: $f(x) \geq f(x_{min})$ для любого x из некоторой окрестности точки x_{min} .

Например, для точки C за окрестность можно взять интервал $(3; 5)$ или даже $(2; 6)$, а можно совсем маленький – $(4 - 0,01; 4 + 0,01)$.



Следующие факты помогают искать точки экстремума функции!

- Если производная f' в точке x равна нулю и меняет свой знак слева направо с “+” на “-”, то эта точка является точкой максимума.



Заметим также, что если производная f' в точке x не существует и меняет свой знак слева направо с “+” на “-” (но x – внутренняя точка области определения функции f !), то эта точка является точкой максимума.

Пример: в точке A производная равна нулю и эта точка является точкой максимума; в точке C производная не “равна нулю”, а не существует, при этом точка C также является точкой максимума.

- Если производная в точке x равна нулю и меняет свой знак слева направо с “-” на “+”, то эта точка является точкой минимума.

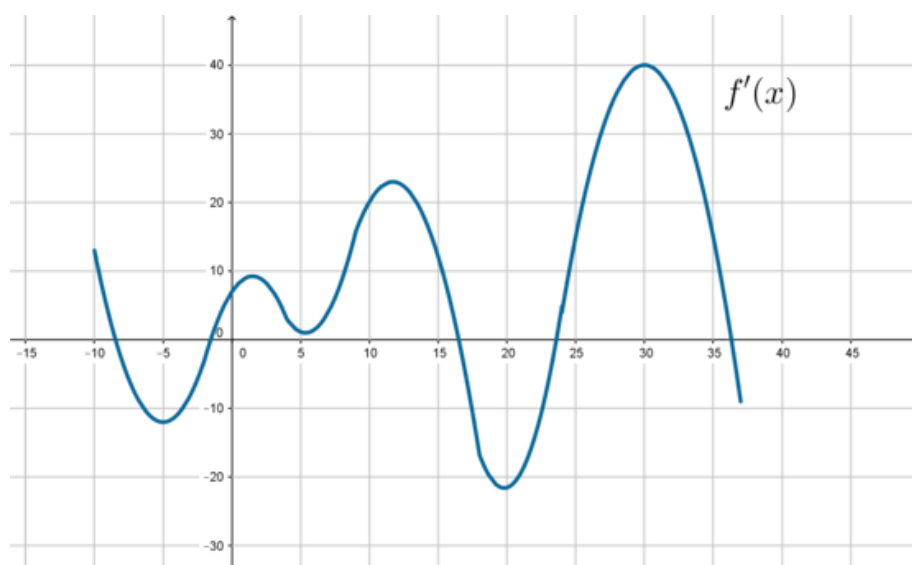
Также, если производная f' в точке x не существует и меняет свой знак слева направо с “-” на “+” (но x – внутренняя точка области определения функции f !), то эта точка является точкой минимума.

- Заметим, что точки экстремума – это значение абсциссы x .
- Заметим, что существует такое понятие, как **критические точки** — это все точки, в которых производная функции либо равна нулю, либо не существует. Таким образом, **только часть критических точек является точками экстремума**.

Практика

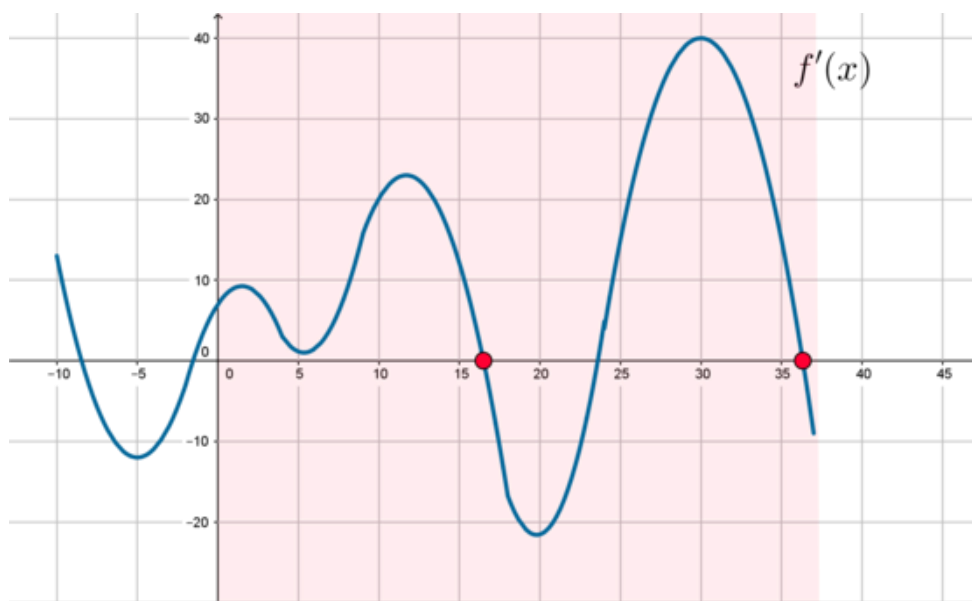
Задание 1

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на отрезке $[-10; 37]$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[0; 37]$.





Решение: Точка максимума – значение x , в котором производная меняет свой знак с “+” на “–”. Следовательно, в этой точке ее график пересекает ось абсцисс “сверху вниз” (если двигаться по рисунку слева направо). Отметим отрезок $[0; 37]$ и увидим, что таких точек 2:

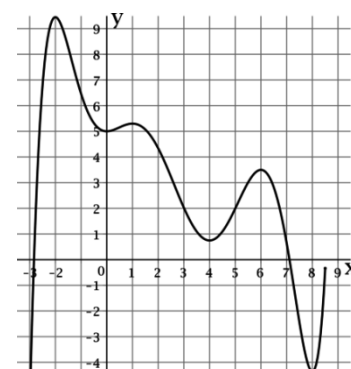


Ответ: 2

Задание 2

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8,5)$. Найдите сумму точек экстремума этой функции.

Решение: Точкой экстремума функции называется точка, в которой функция достигает локально минимальное или локально максимальное значение.



По рисунку можно определить, что функция $f(x)$ достигает локально минимальные значения в точках 0, 4 и 8, а локально максимальные значения в точках $-2, 1$ и 6.

Таким образом, сумма точек экстремума этой функции равна $0 + 4 + 8 + (-2) + 1 + 6 = 17$.

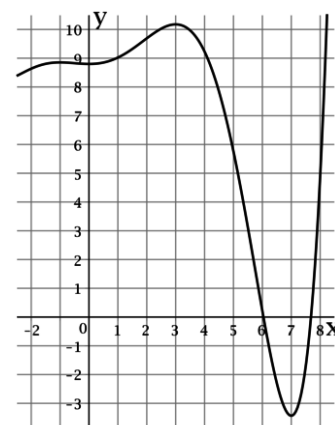
Ответ: 17

Задание 3

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-2,5; 8,4)$. В какой точке отрезка $[-1; 6]$ функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение?

Решение:

По рисунку можно определить, что функция $y = f'(x)$ на отрезке $[-1; 6]$ принимает неотрицательные значения, при этом $f'(6) =$





0.

Так как на полуинтервале $[-1; 6)$ производная функции $f(x)$ положительна, то сама функция $f(x)$ на $[-1; 6)$ возрастает, тогда $y = f(x)$ на отрезке $[-1; 6]$ принимает наибольшее значение при $x = 6$.

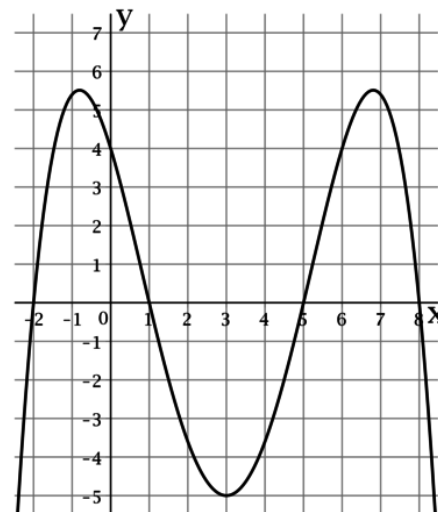
Ответ: 6

Задание 4

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-2, 3; 8, 6)$. В какой точке отрезка $[1, 5; 7]$ функция $y = f(x)$ принимает наименьшее значение?

Решение:

1. По рисунку можно определить, что функция $y = f'(x)$ на полуинтервале $[1, 5; 5)$ принимает отрицательные значения, $f'(5) = 0$, на полуинтервале $(5; 7]$ функция $f'(x)$ положительна.
2. Тогда на $[1, 5; 5)$ функция $f(x)$ убывает, в $x = 5$ достигается локальный минимум $f(x)$, затем на $(5; 7]$ функция $f(x)$ возрастает.
3. Таким образом, наименьшее значение функции $f(x)$ на $[1, 5; 7]$ достигается при $x = 5$.



Ответ: 5