



Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции с помощью производной

Связь производной с возрастанием/убыванием функции

- Если производная положительна на промежутке $(a;b)$, то функция на нем строго возрастает.

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow$$

- Если производная отрицательна на промежутке $(a;b)$, то функция на нем строго убывает.

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow$$

Заметим, что обратные утверждения неверны!

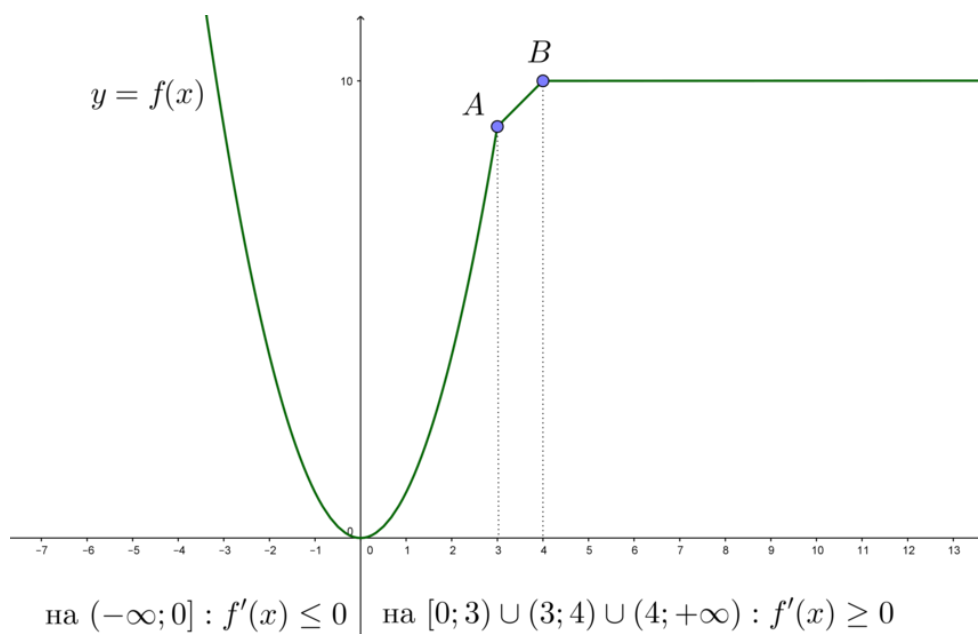
То есть если функция строго возрастает на каком-то промежутке, то из этого не следует, что на всем этом промежутке ее производная будет положительной.

Например: функция $f(x) = x^3$ на отрезке $[-1; 1]$ строго возрастает, но ее производная не положительна всюду: в точке $x = 0$ ее производная $f'(0) = 0$ (т.к. $f'(x) = 3x^2$).

- Если функция не убывает (возрастает и/или константа) на промежутке $(a; b)$, то на этом промежутке ее производная неотрицательна (≥ 0). Верно и обратное утверждение.
- Если функция не возрастает (убывает и/или константа) на промежутке $(a; b)$, то на этом промежутке ее производная неположительна (≤ 0).

Верно и обратное утверждение.

- В точках излома (на рисунке это точки A и B) производной не существует.

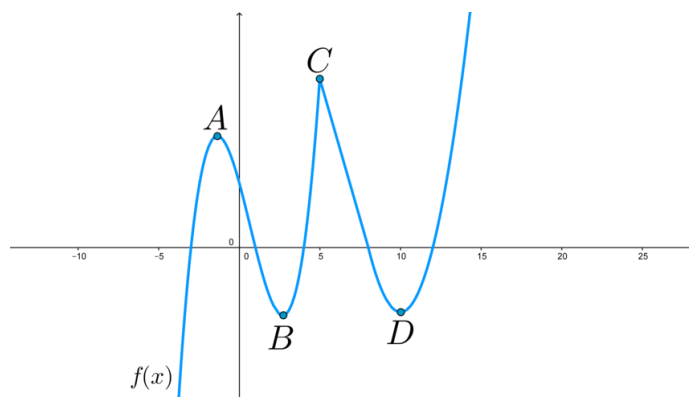


Заметим, что на промежутке $(4; +\infty)$ производная $f'(x) = 0$, т.к. на этом промежутке функция является константой ($f(x) = 10$).



Пример: найдите количество точек, в которых производная равна нулю, если на рисунке дан график функции:

Производная равна нулю в точках A, B, D , а в точке C она не существует, т.к. это точка излома.



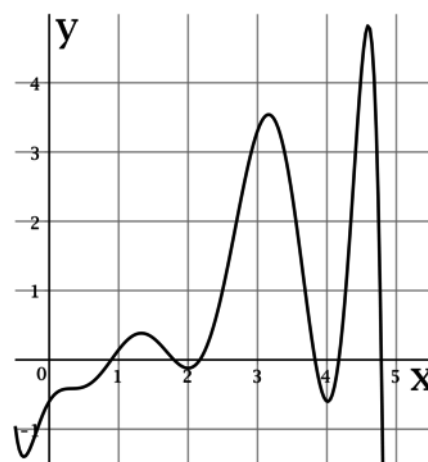
Практика

Задание 1

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-0,6; 4,8)$. Найдите промежутки возрастания функции $y = f(x)$. В ответе укажите произведение целых точек, входящих в эти промежутки.

Решение:

1. Для функции $f(x)$, у которой производная в точке x_0 имеет смысл, утверждение о том, что $f(x)$ возрастает в x_0 равносильно тому, что $f'(x_0) > 0$.
2. На интервале $(-0,6; 4,8)$ целыми являются точки 0, 1, 2, 3, 4. Среди этих точек $f'(x)$ положительна только в 1 и 3.
3. Таким образом, произведение целых точек, в которых функция возрастает, равно $3 \cdot 1 = 3$.



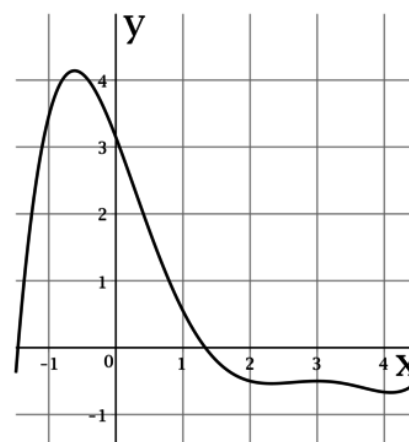
Ответ: 3

Задание 2

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-1,5; 4,5)$. Найдите промежутки возрастания функции $y = f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

Решение:

1. Для функции $f(x)$, у которой производная в точке x_0 имеет смысл, утверждение о том, что $f(x)$ возрастает в x_0 равносильно тому, что $f'(x_0) > 0$.
2. На интервале $(-1,5; 4,5)$ целыми являются точки $-1, 0, 1, 2, 3, 4$.
3. Среди этих точек $f'(x)$ положительна только в $-1, 0$ и 1 .
4. Таким образом, сумма целых точек, в которых функция возрастает, равна $-1 + 0 + 1 = 0$.





Ответ: 0