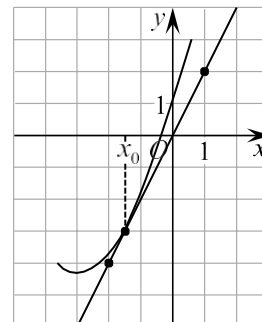


Тестирование

Вариант №1 (в Решу ЕГЭ № 34201902)

1.

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

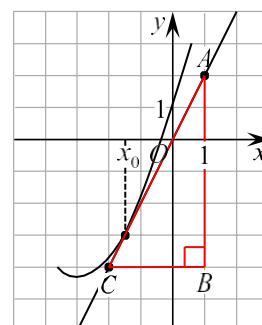


Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(1; 2)$, $B(1; -4)$, $C(-2; -4)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу ACB :

$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{2+4}{1+2} = 2.$$

Ответ: 2.



2. Прямая $y = 3x - 2$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 5x^2 + 6x + 7$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Условие касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$$

В нашем случае имеем:

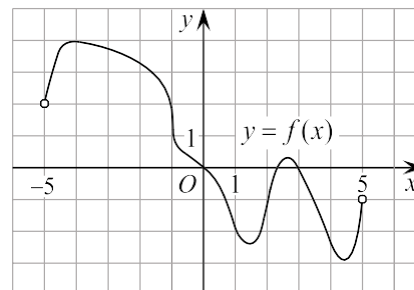
$$\begin{cases} 3x^2 - 10x + 6 = 3, \\ x^3 - 5x^2 + 6x + 7 = 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 10x + 3 = 0, \\ x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ x = 3, \\ x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = 0 (*) \end{cases}$$

Проверка показывает, что первый корень не удовлетворяет, а второй удовлетворяет уравнению (*). Поэтому искомая абсцисса точки касания 3.

Ответ: 3.

3.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней.



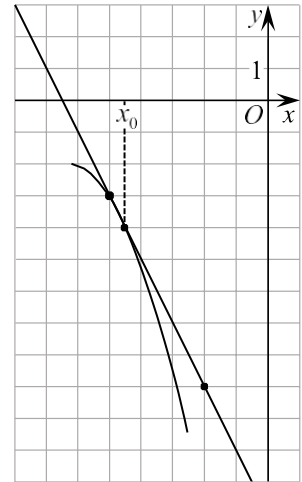
Решение.

Поскольку касательная параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны 0. Угловым коэффициентом касательной равен значению производной в точке касания. У данной функции производная равна нулю только в точках экстремума функции. На заданном интервале функция имеет 2 максимума и 2 минимума, итого 4 экстремума. Таким образом, касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней в 4 точках.

Ответ: 4.

4.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

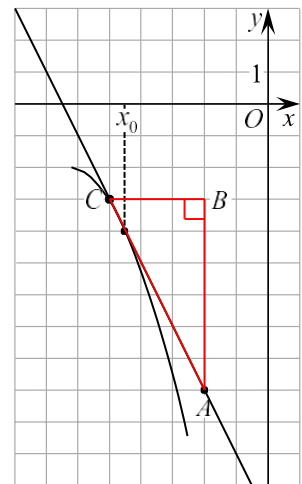


Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(-2; -9)$, $B(-2; -3)$, $C(-5; -3)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB . Поэтому

$$y'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\operatorname{tg}(\angle ACB) = -\frac{AB}{BC} = -\frac{6}{3} = -2.$$

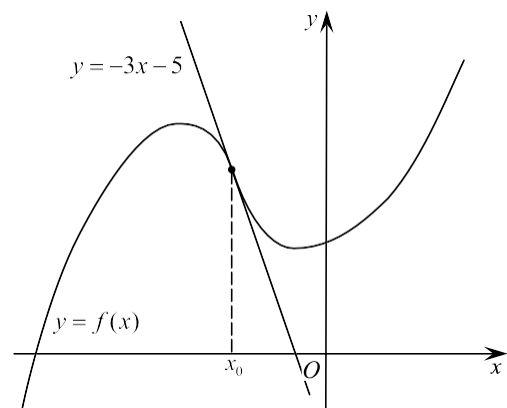
Ответ: -2 .



5.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0 . Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции

$$g(x) = -7f(x) + 21x + \frac{1}{441} \text{ в точке } x_0.$$



Решение.

Найдём производную функции $g(x)$:

$$g'(x) = -7 \cdot f'(x) + 21.$$

Найдём значение $f'(x_0)$. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной.

$$f'(x_0) = k = -3.$$

Тогда искомое значение

$$g'(x_0) = -7 \cdot f'(x_0) + 21 = -7 \cdot (-3) + 21 = 42.$$

Ответ: 42 .

6. Прямая $y = -3x + 8$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

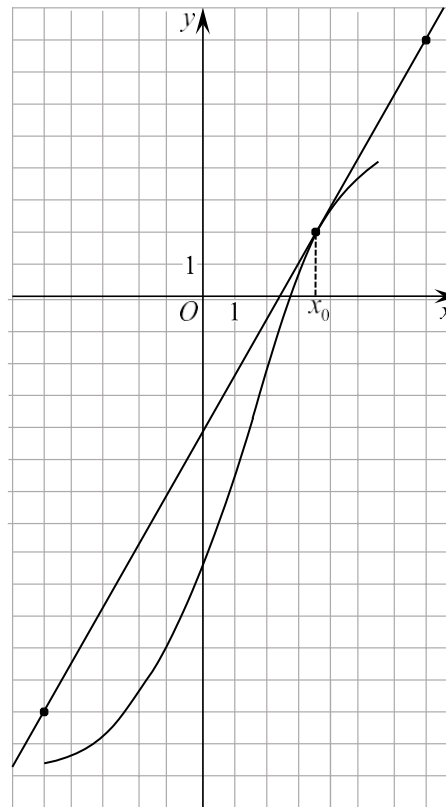
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = -3x + 8$ их угловые коэффициенты равны. Поэтому абсцисса точки касания находится из уравнения $y' = -3$:

$$(x^2 + 7x - 6)' = -3 \Leftrightarrow 2x + 7 = -3 \Leftrightarrow x = -5.$$

Ответ: -5 .

7.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

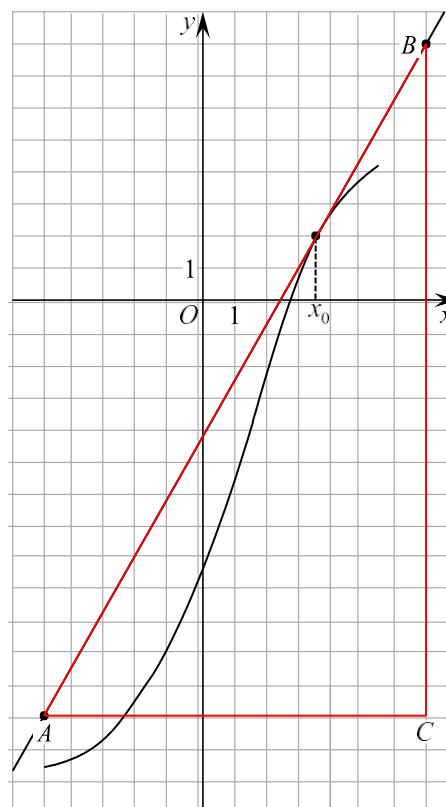


Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(-5; -13)$, $B(7; 8)$, $C(7; -13)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу BAC

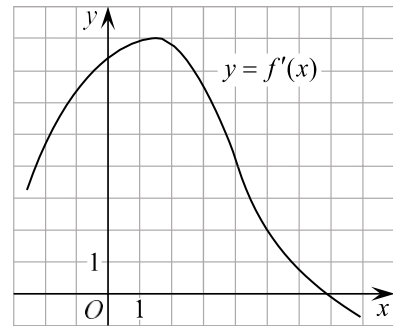
$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{21}{12} = 1,75.$$

Ответ: $1,75$.



8.

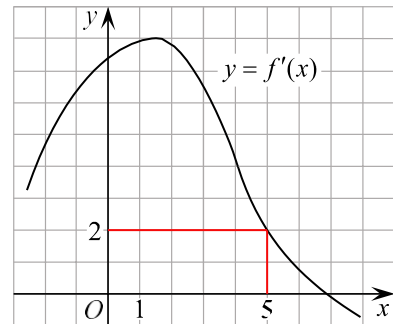
На рисунке изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 2$ или совпадает с ней.



Решение.

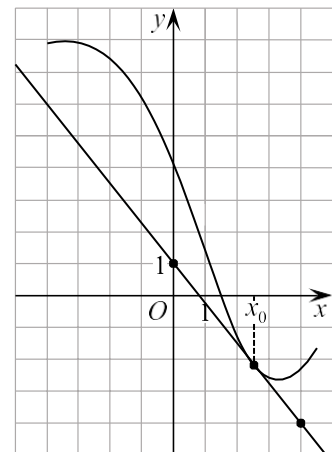
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = 2x - 2$ или совпадает с ней, она имеет угловой коэффициент равный 2 и $f'(x_0) = 2$. Осталось найти, при каких x производная принимает значение 2. Искомая точка $x_0 = 5$.

Ответ: 5.



9.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

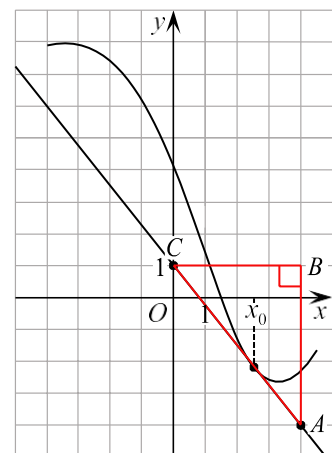


Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(4; -4)$, $B(4; 1)$, $C(0; 1)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB :

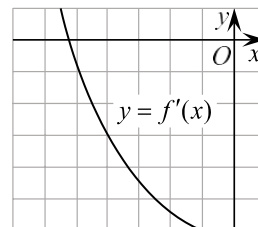
$$y'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\operatorname{tg} \angle ACB = -\frac{AB}{BC} = -\frac{5}{4} = -1,25.$$

Ответ: $-1,25$.



10.

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -3x - 2$ или совпадает с ней.



Решение.

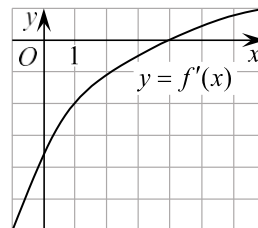
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой или совпадает с ней, её угловой коэффициент равен -3 . Следовательно, мы ищем точку, в которой угловой коэффициент равен -3 , а значит, и производная равна -3 . Поэтому искомая точка $x = -4$.

Ответ: -4 .

Вариант №2 (в Решу ЕГЭ №34202038)

1.

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 6 - 2x$ или совпадает с ней.



Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = 6 - 2x$ или совпадает с ней, её угловой коэффициент равен -2 . Следовательно, мы ищем точку, в которой угловой коэффициент равен -2 , а значит, и производная равна -2 . Поэтому искомая точка $x = 1$.

Ответ: 1.

2. Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $f(x) = ax^2 + 2x + 3$. Найдите a .

Решение.

Прямая $y = kx + b$ является касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда одновременно $f(x_0) = y(x_0)$ и $f'(x_0) = k$. В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 2ax_0 + 2 = 3, \\ ax_0^2 + 2x_0 + 3 = 3x_0 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0 = 0,5, \\ 0,5x_0 - x_0 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,125, \\ x_0 = 4. \end{cases}$$

Искомое значение a равно $0,125$.

Ответ: $0,125$.

Приведем другое решение.

По смыслу задачи $a \neq 0$, а значит, график заданной функции — парабола. Касательная к параболе (а также и к гиперболе) имеет с ней единственную общую точку. Поэтому необходимо и достаточно, чтобы уравнение $ax^2 + 2x + 3 = 3x + 1$ имело единственно решение. Для этого дискриминант $1 - 8a$ уравнения $ax^2 - x + 2 = 0$ должен быть равен нулю, откуда $a = \frac{1}{8} = 0,125$.

3. Прямая $y = 7x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x - 8$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

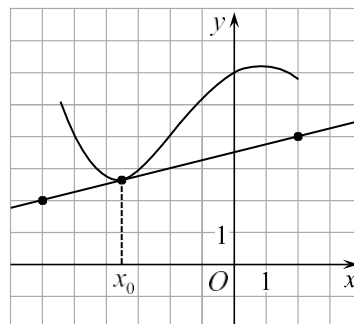
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = 7x - 5$ их угловые коэффициенты равны. Поэтому абсцисса точки касания находится из уравнения $y' = 7$:

$$(x^2 + 6x - 8)' = 7 \Leftrightarrow 2x + 6 = 7 \Leftrightarrow x = 0,5.$$

Ответ: $0,5$.

4.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

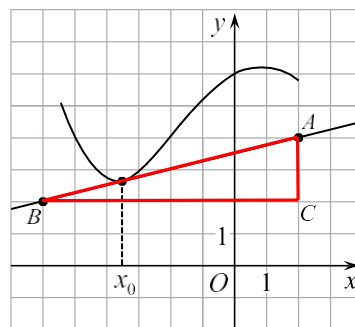


Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(2; 4)$, $B(-6; 2)$, $C(2; 2)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу ABC . Поэтому

$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{8} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.



5. Прямая $y = 3x - 2$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 5x^2 + 6x + 7$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Условие касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$$

В нашем случае имеем:

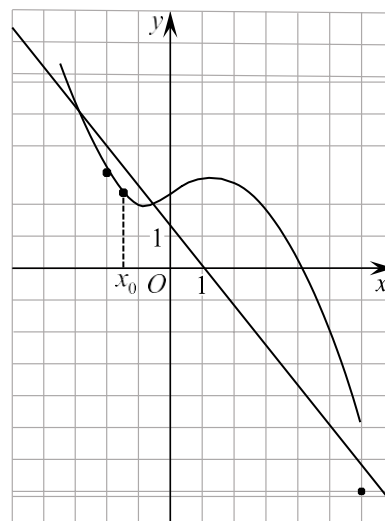
$$\begin{cases} 3x^2 - 10x + 6 = 3, \\ x^3 - 5x^2 + 6x + 7 = 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 10x + 3 = 0, \\ x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ x = 3, \\ x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = 0 (*) \end{cases}$$

Проверка показывает, что первый корень не удовлетворяет, а второй удовлетворяет уравнению (*). Поэтому искомая абсцисса точки касания 3.

Ответ: 3.

6.

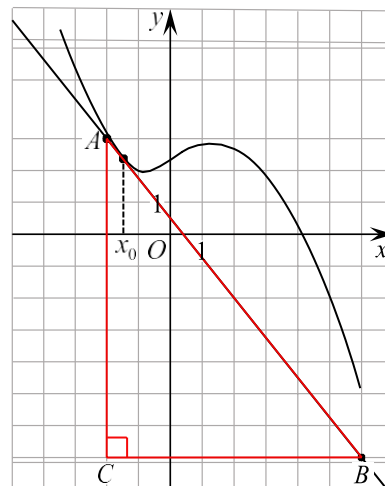
На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

**Решение.**

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(-2; 3)$, $B(6; -7)$, $C(-2; -7)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ABC . Поэтому

$$y'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ABC) = -\operatorname{tg}(\angle ABC) = -\frac{AC}{BC} = -\frac{10}{8} = -1,25.$$

Ответ: -1,25.



7.

Прямая $y = 5x + 5$ является касательной к графику функции $8x^2 + 29x + c$. Найдите c .

Решение.

Условие касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$$

В нашем случае имеем:

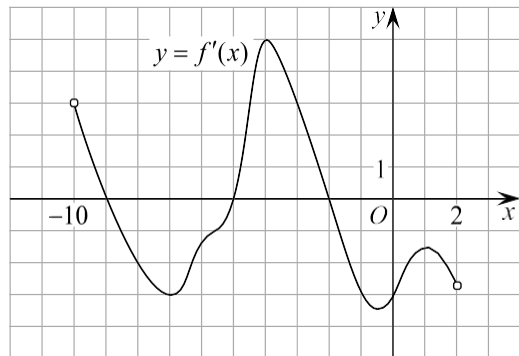
$$\begin{cases} 16x + 29 = 5, \\ 8x^2 + 29x + c = 5x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1,5, \\ 8x^2 + 24x + c - 5 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -1,5, \\ c = 23. \end{cases}$$

Таким образом, $c = 23$.

Ответ: 23.

8.

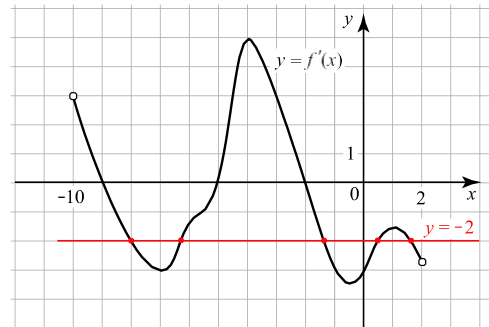
На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней.



Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны -2 . Найдём количество точек, в которых $f'(x) = -2$, это соответствует количеству точек пересечения графика производной с прямой $y = -2$. На данном интервале таких точек 5.

Ответ: 5.



9. Прямая $y = -3x + 8$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

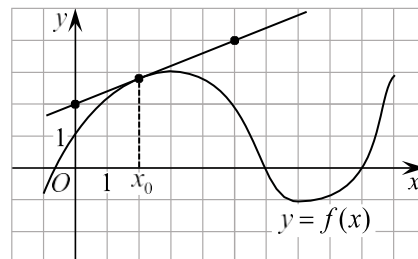
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = -3x + 8$ их угловые коэффициенты равны. Поэтому абсцисса точки касания находится из уравнения $y' = -3$:

$$(x^2 + 7x - 6)' = -3 \Leftrightarrow 2x + 7 = -3 \Leftrightarrow x = -5.$$

Ответ: -5 .

10.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке $x_0 = 2$. Найдите значение производной функции $g(x) = x^2 - f(x) + 1$ в точке x_0 .



Решение.

Найдём производную функции $g(x)$:

$$g'(x) = 2x - f'(x).$$

По рисунку найдём значение $f'(x_0)$. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который, в свою очередь, равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Поэтому

$$f'(x_0) = f'(2) = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Тогда для искомого значения получаем

$$g'(x_0) = g'(2) = 2 \cdot x_0 - f'(x_0) = 2 \cdot 2 - f'(2) = 2 \cdot 2 - 0,4 = 3,6.$$

Ответ: 3,6.

