



Производная. Нетипичные задачи в исследовании функций с помощью производной (доп. материалы)

В некоторых задачах поиск наибольшего/наименьшего значения функции через производную довольно затруднителен или невозможен вручную.

Например, уравнение $f'(x) = 0$ является нестандартным и решить его руками невозможно.

Пусть функция $f(t(x))$ – сложная.

Если на $[t(a), t(b)]$ функция $f(t)$ является строго возрастающей (или строго убывающей), то наибольшее значение будет достигаться в такой точке x_0 , в которой достигается наибольшее (или наименьшее) значение функции $t(x)$.

Пример:

Найти наименьшее значение функции $f(x) = \cos(\pi x^2)$ на отрезке $[0; \frac{1}{2}]$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f(t) = \cos t$. Если x пробегает все значения из отрезка $[0; \frac{1}{2}]$, то t пробегает все значения из отрезка $[0; \frac{\pi}{4}]$.

Функция $f(t) = \cos t$ при всех $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ является убывающей, следовательно, наибольшее значение будет принимать при наименьшем значении $t = 0$.

Наименьшее значение $t = 0$ принимает при наименьшем значении $x = 0$.

Таким образом, ответ: $f(0) = 1$.

Задание 1**

Найдите наибольшее значение функции $y = -x^4 + 4x^3 - x^2 + 2x + 11$ на отрезке $[0; 2]$.

Решение:

$$y' = -4x^3 + 12x^2 - 2x + 2 = (-4x^3 + 11x^2) + (x^2 - 2x + 1) + 1 = x^2(11 - 4x) + (x - 1)^2 + 1$$

На отрезке $[0; 2]$ все слагаемые в полученной выше сумме неотрицательны, а последнее слагаемое даже положительно, следовательно, $y' > 0$ на отрезке $[0; 2]$. Таким образом, y возрастает на отрезке $[0; 2]$, следовательно, наибольшее на отрезке $[0; 2]$ значение рассматриваемая функция принимает при $x = 2$:

$$y(2) = -16 + 32 - 4 + 4 + 11 = 27.$$

Ответ: 27



Задание 2**

Найдите наибольшее значение функции $y = 3x^5 - 5x^3 - 180x + 7$ на $[-3; 3]$.

Решение:

$$y' = 15x^4 - 15x^2 - 180 = 15(x^4 - x^2 - 12).$$

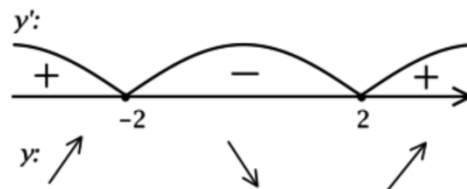
Найдём критические точки (то есть внутренние точки области определения функции, в которых её производная равна 0 или не существует):

$$15(x^4 - x^2 - 12) = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0$$

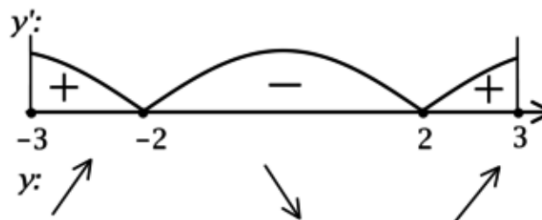
– биквадратное уравнение, которое решается при помощи замены $x^2 = t, t \geq 0$.

Корни уравнения после замены: $t_1 = -3, t_2 = 4$, откуда находим $x_1 = 2, x_2 = -2$. Для того, чтобы найти наибольшее/наименьшее значение функции, нужно понять, как схематично выглядит её график.

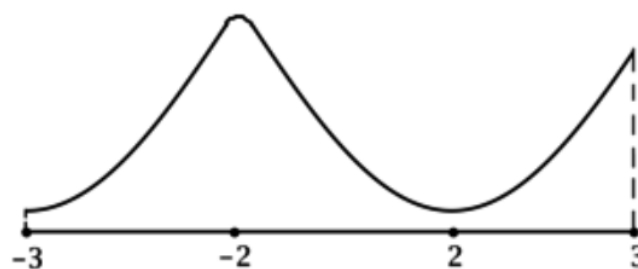
Найдём промежутки знакопостоянства y' :



Найдём промежутки знакопостоянства y' на отрезке $[-3; 3]$:



Эскиз графика y на отрезке $[-3; 3]$:





Значит $x = -2$ – точка локального максимума и наибольшее значение функция достигает в ней или в $x = 3$.

Сравним эти значения:

$$y(-2) = -96 + 40 + 360 + 7 = 311,$$

$$y(3) = 729 - 135 - 540 + 7 = 61 < 311.$$

Итого: 311 – наибольшее значение функции y на $[-3; 3]$.

Ответ: 311

Задание 3**

Найдите наибольшее значение на отрезке $[0; \frac{1}{\sin 1}]$ функции $y = \sin 1 \cdot x$.

Решение:

$y' = \sin 1$, следовательно, функция монотонна, тогда она принимает наибольшее значение в одном из концов отрезка.

$$y\left(\frac{1}{\sin 1}\right) = 1 > 0 = y(0).$$

Таким образом, наибольшее значение функции y на отрезке $[0; \frac{1}{\sin 1}]$ равно 1.

Ответ: 1