



«Тожественные преобразования тригонометрических выражений»

Задания

Задание 1.

$$\frac{3 \sin(\alpha - 9\pi) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin(\pi - \alpha)}$$

Упростить выражение

Упростим каждую функцию:

$$\sin(\alpha - 9\pi) = \sin(\alpha - (2\pi \cdot 4 + \pi)) = \sin(\alpha - 2\pi \cdot 4 - \pi) = \sin(\alpha - \pi)$$

$$\sin(\alpha - \pi) = \sin(\alpha - \pi + 2\pi) = \sin(\alpha + \pi)$$

Применим формулу приведения для синуса:

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right)$$

Теперь применим для косинуса:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \sin(-\alpha)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(-\alpha + \pi) = -\sin(-\alpha)$$

$$-\sin(-\alpha) = -(-\sin \alpha) = \sin \alpha$$

Подставляем в искомое выражение и упрощаем:

$$\frac{3 \sin(\alpha - 9\pi) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{-3 \sin \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-4 \sin \alpha}{\sin \alpha} = -4$$



Задание 2.

Найти $\operatorname{tg}^2 3\alpha$, если $\cos 6\alpha = 0,2$

В данном случае аргументы отличаются в два раза, значит, нам понадобятся формулы двойного угла или же следствия из них – формулы половинного угла.

Используем формулы двойного угла:

$$\cos 6\alpha = \cos(2 \cdot 3\alpha) = \cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha$$

$$\cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha = 0,2$$

Здесь мы применим основное тригонометрическое тождество:

$$\cos^2 3\alpha + \sin^2 3\alpha = 1$$

Сложив эти два значения, получим выражения (из которых в дальнейшем, мы и найдем тангенс угла).

$$2 \cos^2 3\alpha = 1,2$$

$$\cos^2 3\alpha = 0,6$$

Тогда:

$$\sin^2 3\alpha = 1 - \cos^2 3\alpha = 1 - 0,6 = 0,4$$

Так как требуется найти тангенс, записываем его через определение:

$$\operatorname{tg}^2 3\alpha = \frac{\sin^2 3\alpha}{\cos^2 3\alpha} = \frac{0,4}{0,6} = \frac{2}{3}$$



Задание 3.

$$3 \sin \frac{11\pi}{12} \cdot \cos \frac{11\pi}{12}$$

Видим произведение косинуса и синуса одного аргумента. Тогда нужно применить формулу синуса двойного угла. Не хватает двойки перед выражением. Поэтому умножим и разделим выражение на 2.

$$3 \sin \frac{11\pi}{12} \cdot \cos \frac{11\pi}{12} = \frac{3}{2} \cdot 2 \sin \frac{11\pi}{12} \cdot \cos \frac{11\pi}{12} =$$

Применим формулу двойного угла, получим:

$$= \frac{3}{2} \cdot \sin \left(2 \cdot \frac{11\pi}{12} \right) = \frac{3}{2} \cdot \sin \frac{11\pi}{6}$$

Далее применим формулы двойного угла. Сначала выделим целую часть.

$$\sin \frac{11\pi}{6} = \sin \left(\pi + \frac{5\pi}{6} \right) = -\sin \frac{5\pi}{6}$$

$$-\sin \frac{5\pi}{6} = -\sin \left(-\frac{\pi}{6} + \pi \right) = \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)$$

$$\sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2} \cdot \sin \frac{11\pi}{6} = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{3}{4} = -0,75$$

Разберем тригонометрические функции суммы и разности. Они не так часто применяются при упрощениях и вычислениях, следствие из них это формулы двойных углов.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}$$



Задание 4.

Упростить выражение:

$$\frac{\cos x \cdot \cos y - \cos(x + y)}{\cos(x - y) - \sin x \cdot \sin y}$$

Применяем формулы косинуса суммы и разности:

$$\begin{aligned} \frac{\cos x \cdot \cos y - \cos(x + y)}{\cos(x - y) - \sin x \cdot \sin y} &= \frac{\cos x \cdot \cos y - (\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y)}{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y - \sin x \cdot \sin y} = \frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} \\ &= \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y \end{aligned}$$

Ответ: $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$.